ganz1912

E. W. BETH
JEAN PIAGET

Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real

EDITORIAL CIENCIA NUEVA, S. L.
CRUZ VERDE, 22 MADRID

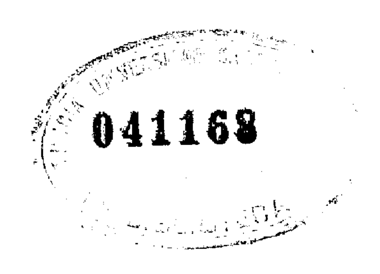


Título de la edición original:
Epistemologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée reelle

Traducción: Víctor Sánchez de Zavala

Maqueta: Alberto Corazón

ganz1912



https://tinyurl.com/y794dggv
https://tinyurl.com/y9malmmm

© Copyright 1961. Presses Universitaires de France, París. Derechos exclusivos para la publicación en castellano: Editorial Ciencia Nueva, Sociedad Limitada. Cruz Verde, 22. Madrid-13 (España).

Depósito legal: M. 20.986 - 1968

MARIBEL, ARTES GRÁFICAS.—Tomás Bretón, 51. MADRID-7

PRIMERA PARTE

INTRODUCCION

ganz1912

Con objeto de aclarar el fondo de las reflexiones que constituyen los capítulos que siguen, me parece que será útil presentar ahora, a modo de introducción, algunos sucintos datos relativos a mi evolución intelectual.

Tras haber acabado en 1932 los estudios de matemáticas y de física en la Universidad de Utrecht, continué estudiando tres años más en centros universitarios: primero en el mismo Utrecht, después en Leiden y finalmente en Bruselas. En 1933 tuve el privilegio de poder incorporarme a una agrupación filosófica de vanguardia, la *Genootschap voor Critische Philosophie* (que a partir de 1938, debido a haber abandonado la orientación exclusivamente neokantiana, pasó a ser la *Genootschap voor Wetenschappelijke Philosophie* [«Sociedad de filosofía científica»]), en la que, juntamente con el matemático y lógico P. G. J. Vredenduin, me correspondía representar a la filosofía de las ciencias matemáticas; pues ya en 1930 ó 1931 había yo empezado a orientarme hacia la filosofía en general, y, más en particular, hacia la epistemología y la investigación de los fundamentos de las matemáticas. De este modo, en 1935 pude defender una tesis de doctorado sobre *Rede en aanschouwing in de wiskunde* (Razón e intuición en las matemáticas, Groningen, 1935), si bien no ante la Facultad de Ciencias, sino ante la de Letras, que me había admitido después de someterme a un examen doctoral sobre psicología teórica. Posteriormente me he liberado poco a poco de las influencias de la tradición filosófica, principalmente del kantismo; no obstante lo cual,

he conservado siempre un profundo interés por la historia de las diversas disciplinas que estudiaba.

De 1935 a 1945 enseñé matemáticas en distintas instituciones de enseñanza secundaria; y se comprenderá fácilmente que durante este período tuviera muchas razones para reflexionar sobre la psicología del pensamiento matemático. Asimismo me estimuló en gran medida la psicolingüística de G. Mannoury, y los estudios psicolingüísticos que consagré a los sistemas formales, a la noción de tiempo y a la de espacio, fueron premiados por la *Wiskundig Genootschap* de Amsterdam en 1936, 1937 y 1938. En 1939 publiqué un informe sobre las bases psicológicas de una reforma de la enseñanza matemática, trabajo que más tarde tuve ocasión de discutir con O. Selz; al mismo tiempo me esforzaba por profundizar en el estudio del intuicionismo de L. E. J. Brouwer y A. Heyting.

También había, sin embargo, influencias en sentido contrario, especialmente provinentes del cantorismo y del logicismo; así, a partir de 1933, tuve la buena fortuna de poder seguir una serie de conferencias sobre los fundamentos de las matemáticas dada por A. Fraenkel en la Universidad de Utrecht. Algo más tarde, el estudio que hacíamos en la *Genootschap* de los trabajos de R. Carnap, y, posteriormente, los contactos personales habidos con R. Feys, H Scholz y A. Tarski, me han llevado a orientarme hacia la lógica en lugar de hacia la psicología.

Cabe interpretar este cambio de posición como una verdadera «conversión intelectual» suscitada por consideraciones de orden puramente científico; pero igualmente puede sospecharse que se trata, por el contrario, de un simple retorno a unos intereses primordiales que únicamente habían estado «reprimidos» durante cierto período, debido a determinadas influencias externas. Lo mismo da una cosa que otra, con tal de que se admita que las tesis que me propongo defender no se fundan sobre ninguna postura tomada de antemano con respecto a la psicología, ni sobre un logicismo o un formalismo miopes, sino sobre una preocupación profunda y sincera por hacer justicia tanto a la lógica formal como a la psicología del pensamiento, así como sobre unos estudios muy ahincados en ambos campos.

Por lo demás, en los capítulos que siguen no se encontrará ante todo una defensa de una postura personal con respecto a las diferentes cuestiones estudiadas; pues mi punto de vista se caracteriza, precisamente, por un esfuerzo continuo de comprensión de cualquier otro punto de vista como posición razonable: aborrezco las doctrinas que nos obligan a rechazar todas las demás opiniones como algo «carente de sentido». Al mismo tiempo, creo que todas las concepciones tradicionales acerca de los fundamentos de la lógica y de las matemáticas han resultado ser inadecuadas frente a la situación actual; por ello se impone, a mi entender, la necesidad de una especie de síntesis doctrinal de las diversas tendencias contemporáreas, síntesis que irá tomando cuerpo, probablemente, a medida que tales tendencias se lleven a sus posiciones más extremas.

Pese a esta convicción, y por más que actualmente mis trabajos científicos versen ante todo sobre la lógica matemática, la filosofía de las ciencias y la historia de estos dominios científicos (dado que a partir de 1946 tales disciplinas forman el tema de mi enseñanza en la Universidad de Amsterdam), no he renunciado nunca a un contacto frecuente con la filosofía general, contacto que, por otra parte, está facilitado principalmente por las sesiones de la *Genootschap*. Y me siento especialmente agradecido ante el hecho de que con la presente asociación con J. Piaget me encuentro en una ocasión inapreciable de orientarme una vez más en el dominio tan vasto y fascinador de la psicología del pensamiento.

Me permito hacer notar, además, que los simposios internacionales de Epistemología genética que Piaget acostumbra a organizar en el Centro de Ginebra, y a los que he tenido el privilegio de poder participar en 1956, 1959 y 1960, han estimulado poderosamente mi interés por la investigación en este campo. Los cordiales y abiertos debates entre representantes de las diversas disciplinas pertinentes (epistemología, lógica, matemáticas, psicología), que tienen lugar en un reducido círculo, en el que se agrupan, junto a Piaget y sus colaboradores, cierto número de especialistas invitados, han demostrado ser súmamente fructuosos para todos los participantes.

Gracias a estos simposios he tenido el gusto de conocer a Jean-Blaise Grize, quien ha tenido la amabilidad de leer el

manuscrito de este trabajo. Las perspicaces observaciones que me ha comunicado, y que no sólo se referían a la forma, sino asimismo a la materia, me han permitido incorporar numerosas e importantes mejoras al texto; y querría que aceptase esta expresión de mi más sincera gratitud[1].

---

[1] En esta primera parte damos las referencias bibliográficas indicando solamente el nombre del autor y el año de edición, con los que remitimos a la *Bibliografía* que se encuentra al final del libro. [En lo que respecta a las ediciones en castellano —que indicamos entre paréntesis cuadrados, como, por lo demás, todas las adiciones que hacemos al texto original, para aclararlo u obviar alguna omisión o ambigüedad—, únicamente reseñamos el año cuando hay varias ediciones que convenga distinguir entre sí (*T.*).]

1 EL ANALISIS DEL RAZONAMIENTO MATEMATICO ES INACCESIBLE PARA LA SILOGISTICA TRADICIONAL

§ 1. **Descartes.**—Hoy estamos en situación de considerar adquirido definitivamente que el razonamiento matemático —tal y como el que nos ofrecería, por ejemplo, una versión perfeccionada de los *Elementos* de Euclides— no puede representarse mediante una sucesión de silogismos pertenecientes al sistema de Aristóteles.

Cabe interpretar este hecho de acuerdo con una u otra de las dos incompatibles doctrinas siguientes:

1) la teoría del silogismo no proporciona un análisis completo del razonamiento matemático, pero tal análisis será posible en cuanto se reemplace la teoría aristotélica por una teoría lógica ampliada que, sin embargo, sea de carácter análogo a aquélla;

2) en el razonamiento matemático intervienen pasos que difieren esencialmente del silogismo, por lo cual es imposible efectuar un análisis lógico de tal razonamiento, aun cuando dispusiéramos de una teoría lógica considerablemente ampliada.

Según las concepciones contemporáneas, la primera doctrina es la exacta; sin embargo, los filósofos y los matemáticos han creído durante mucho tiempo que era necesario aceptar la segunda. No es posible, ni necesario, indagar ahora las fuentes de esta última; creo que bastará mostrar que la preconizó Descartes y ocuparse un poco de su desarrollo ulterior.

Lo que para Descartes constituye la diferencia esencial entre el silogismo y el razonamiento matemático es que aquél, partiendo de premisas universales, da lugar inmediatamente a una conclusión igualmente universal, en tanto que el razonamiento matemático hace intervenir una fase intermedia, que consiste en la contemplación de un objeto individual; en efecto, según una observación de las *Respuestas a las segundas objeciones*[1],

... lo propio de nuestro espíritu es formar las proposiciones generales [a partir] del conocimiento de las particulares.

Tal fase intermedia, caracterizadora del razonamiento matemático con respecto al silogismo, apela a la intuición: citemos algunas líneas de la *Regla XIV*[2]:

Esta idea común no pasa de un objeto a otro más que merced a una simple comparación, por la cual afirmamos que la cosa buscada es, en tal o cual respecto, semejante, igual o idéntica a la cosa dada; de manera que en todo razonamiento no conocemos exactamente la verdad sino por comparación. Por ejemplo, en éste, todo A es B, todo B es C, luego todo A es C, se comparan entre sí la cosa buscada y la dada, es decir, A y C, en cuanto a la relación que una y otra guardan con respecto a B, etc... Pero puesto que las formas del silogismo no sirven para nada en cuanto a percibir la verdad, no será inútil al lector, tras haberlas rechazado completamente, el percatarse de que todo conocimiento que no se adquiere por la intuición pura y simple de un objeto aislado se adquiere por comparación entre sí de dos o más objetos.

Según la *Quinta meditación*[3], es esencial que la intuición se aplique a un objeto concreto, aunque no sea material:

... cuando imagino un triángulo, si bien puede ser que no haya en lugar alguno del mundo, salvo en mi pensamiento, semejante figura, y que no la haya habido jamás, no por ello deja de haber cierta naturaleza, forma o esencia determinada de esta figura, la cual es inmutable

---

[1] DESCARTES, 1842, pág. 114. [Adviértase que, tanto en ésta como en las demás citas de trabajos escritos en idiomas distintos del francés, traducimos directamente del texto original, y no a través de la versión francesa de los autores de la presente obra; sólo se exceptúan unos pocos casos (los escritos citados de P. Bernays, F. Enriques, D. Hilbert, W. S. Jevons, E. Mach y T. Ziehen), que, por desgracia, hemos sido incapaces de encontrar en sus versiones originales. En cuanto a las ediciones en castellano, como ya hemos indicado, no seguimos su traducción, sino que las citamos para orientación del lector. (*T.*)]

[2] DESCARTES, 1842, pág. 502 [vers. cast.: *Reglas...*, pág. 131].

[3] DESCARTES, 1842, pág. 84 [vers. cast.: *Disc. del mét. y Medit. ...*, páginas 212-3].

y eterna, que yo no la he inventado y que no depende en modo alguno de mi espíritu; según aparece del hecho de que se puedan demostrar propiedades diversas de tal triángulo, a saber, que sus tres ángulos son iguales a dos rectos, que el ángulo mayor se apoya en el lado mayor, y otras semejantes, las cuales, quiéralo yo o no, reconozco ahora muy clara y evidentemente que están en él, por más que anteriormente no haya pensado en ellas de modo alguno...

§ 2. El problema de Locke y Berkeley.—Esta concepción plantea una grave dificultad, de la que Descartes no se dio cuenta suficientemente: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto (por ejemplo, un triángulo), es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en que acaba la demostración. Al parecer, según Descartes, la esencia del triángulo, y no un triángulo cualquiera, es lo que constituye el objeto de la intuición; ahora bien, Locke reformuló esta concepción al introducir la noción del *triángulo general,* que no sería oblicuángulo ni rectángulo, ni equilátero, isósceles ni escaleno [4].

Observemos que la posición filosófica de Locke difiere considerablemente de la de Descartes: la concepción de este último es netamente platonista, mientras que Locke, que rechaza la doctrina de las *ideas innatas,* no puede aceptar más que una ontología conceptualista. Sin embargo, para el problema que nos ocupa actualmente esta diferencia de opiniones no tiene gran importancia.

§ 3. Soluciones de Berkeley, Hume y Kant.—Conviene citar aquí un texto de Berkeley en el que, con una claridad admirable, se plantea el problema y se hace ver el carácter inadecuado de la solución de Locke [5].

Mas vamos a preguntar ahora *cómo podemos saber que una proposición sea verdadera para todos los triángulos particulares* a menos que primero la hayamos visto *demostrada para la idea abstracta de triángulo,* que conviene igualmente a todos. Pues de que se pueda demostrar que una propiedad conviene a cierto triángulo particular no se sigue que la posea asimismo cualquier otro triángulo que no sea igual a aquél en todos los respectos. Por ejemplo, tras haber demos-

---

[4] LOCKE, 1690, Libro IV, cap. 7, § 9.

[5] BERKELEY, 1710, Introducción, § 16. [La cursiva es de E. W. Beth. (*T.*)].

trado que los tres ángulos de un triángulo isósceles y rectángulo son iguales a dos restos, no puedo concluir de ello que esta afección convenga a todos los demás triángulos que no tengan ni un ángulo recto ni dos lados iguales. Por tanto, parece que, para estar seguros de que esta proposición es universalmente verdadera, o bien hemos de construir una demostración particular para cada triángulo particular, lo cual es imposible, o bien hemos de demostrarla de una vez y para siempre para la *idea abstracta de triángulo*, en la que participan indiferentemente todos los particulares y que representa igualmente a todos ellos. A lo que respondo que, por más que la idea a la vista de la cual hago toda la demostración sea, por ejemplo, la de un triángulo isósceles y rectángulo cuyos lados tengan una longitud determinada, puedo estar seguro, sin embargo, de que se extiende a todos los demás triángulos rectilíneos, de cualquier tipo o tamaño que sean [...]. Es cierto que el diagrama que tengo a la vista incluye todas estas particularidades, pero no se hace la menor mención de ellas en la demostración de la proposición...

Esta explicación es, en sí misma, enteramente aceptable; sin embargo, no constituye más que una respuesta parcial al problema que nos ocupa. En efecto, de lo que se trata es de dos cuestiones conexas pero distintas, a saber:

1) ¿Por qué se hace intervenir, en la demostración de una proposición matemática universal, una fase intermedia que se refiere a un objeto particular (por ejemplo, un triángulo)?

2) ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?

Antes de continuar me importa subrayar que las observaciones de Descartes acerca de la estructura de los razonamientos matemáticos son perfectamente correctas, y que las explicaciones de tan curiosa estructura que se le ocurren a uno a primera vista no son aceptables. Por ejemplo, si se quiere demotrar que en todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos, se empieza por introducir un triángulo particular, diciendo: «*Sea ABC un triángulo cualquiera*»; podría pensarse que semejante frase no vale más que para ilustrar nuestro raciocinio por medio de una figura concreta, pero esta explicación no es satisfactoria, ya que encontramos la misma frase en los tratados científicos que no tienen figuras, y que en los dominios de la matemática abstracta contemporá-

nea, que por su propio objeto no se prestan a la ilustración por medio de figuras, se emplean también frases análogas.

Es evidente que la doctrina de Descartes nos ofrece una respuesta aceptable a la primera pregunta: la fase intermedia de los razonamientos matemáticos ha de valer para que la intuición, que no puede referirse sino a objetos particulares, pueda actuar.

Si Descartes, en la observación que hemos sacado de la *Quinta meditación*, identifica el triángulo particular al que se refiere la contemplación intuitiva con la *esencia del triángulo* (que en Locke queda reemplazada por el triángulo general), hace tal cosa, al parecer, para responder a la vez a la segunda pregunta. Mas semejante proceder no es compatible, en absoluto, con la respuesta que había dado a la primera: es ya difícil conceder a la esencia del triángulo el papel de un triángulo particular, pero si se acepta semejante conclusión, es preciso que la esencia dicha, en tanto que triángulo particular, sea o escaleno, o rectángulo, etc.; y entonces es difícil de comprender que la contemplación intuitiva de este triángulo particular, preferiblemente a la de cualquier otro, pueda justificar una conclusión de alcance universal. Por otra parte, si renunciamos a concebir la esencia del triángulo como un triángulo particular, la primera cuestión queda enteramente abierta.

De parecida forma, Berkeley da una respuesta sumamente convincente a la segunda cuestión, pero no hace lo mismo con la primera. Pues si las propiedades específicas del triángulo particular no desempeñan papel alguno en el raciocinio, no se ve por qué razón se lo habrá introducido.

Hume, por su parte, hace a este respecto una observación que revela toda su perspicacia [6]:

> Pues una de las circunstancias más extraordinarias del actual asunto es ésta: que una vez que el alma ha producido una idea individual, sobre la cual razonamos, la costumbre acompañante, reavivada por el término general o abstracto, sugiere con facilidad cualquier otro individuo si por casualidad formamos algún razonamiento que no concuerde con él. Así, en caso de que mencionemos la palabra triángulo y nos forjemos la idea de uno particular, equilátero, que corresponda a ella y de que después afirmemos *que los tres ángulos de un triángulo son*

[6] HUME, 1739-40, tomo I, Libro I, primera parte, sección VII [versión castellana, tomo I].

iguales entre sí, los otros individuos del escaleno y del isósceles, que habíamos pasado por alto inicialmente, se agolpan inmediatamente sobre nosotros, haciéndonos percibir la falsedad de esta proposición...

Es evidente que esta observación pertenece al campo de la psicología más que al de la lógica; además, a mi juicio, no es válida más que dentro de un nivel ya bastante elevado del pensamiento, nivel al que podría llamarse, empleando un término que, por lo demás, me es poco simpático, el del *pensamiento dialéctico*.

El fenómeno descrito por Hume no se presentará, seguramente, a un nivel primitivo, precrítico, del pensamiento. Muy probablemente, su origen se encuentra en el debate: cabe imaginar dos «*harpedonaptes*» *, uno que afirme «que los tres ángulos de un triángulo son iguales», y otro que refute tal afirmación construyendo, por ejemplo, un triángulo rectángulo. Por lo demás, los debates no académicos entre matemáticos se desarrollan hoy de manera enteramente análoga.

Sin embargo, bastarán cierta cultura matemática y cierto ejercicio para que el matemático pueda *anticipar*, en cierta medida, los «contraejemplos» de que podría valerse su adversario; y la observación de Hume presenta, precisamente, un caso típico de tal anticipación, que permite al matemático evitar las generalizaciones demasiado rápidas.

Observemos que la estructura de una anticipación de esta índole se transfiere desde el nivel del debate al de un razonamiento deductivo por las palabras «*Sea ABC un triángulo cualquiera*» o «*Sea ABC un triángulo arbitrario*», lo que se hace, por decirlo así, es dejar la elección de tal triángulo a un antagonista imaginario.

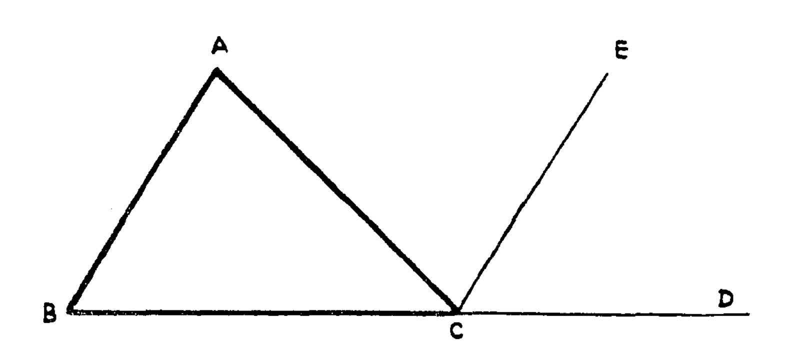
Por el momento podemos comprobar que la observación de Hume constituye una respuesta a la primera pregunta; en cuanto a la segunda, la situación es mucho menos clara, y nos ocuparemos de ella en el capítulo 3, § 23.

Vamos a terminar esta orientación histórica con un examen de las concepciones de Kant. Me permitiré citar varios pasajes

---

* Adaptación de una palabra griega que designa a los sabios egipcios, vinculada a la que significa cuerda, cordón, hilo [*harpedone*] y que literalmente significaría algo así como «los que saben escaparse de los lazos (tendidos)». (*N. del T.*).

característicos de la *Crítica de la razón pura*[7]; se sigue tratando de la cuestión de determinar la suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera.



Sea ahora el geómetra el que se propone tal cuestión. Comenzará inmediatamente por construir un triángulo; como sabe que dos ángulos rectos tomados juntamente valen exactamente lo mismo que todos los ángulos adyacentes juntos que pueden trazarse a partir de un punto sobre una línea recta, prolonga un lado del triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes que, en junto, son iguales a dos rectos; ahora divide el exterior de estos ángulos trazando una línea paralela al lado opuesto del triángulo, y advierte que así se forma un ángulo adyacente exterior que es igual a uno interior, etc. De este modo, a través de una cadena de deducciones y conducido siempre por la intuición, llega a una solución del problema completamente esclarecedora y, a la vez, general.

Así pues, sólo las matemáticas contienen demostraciones, pues extraen sus conocimientos no de conceptos, sino de su construcción, esto es, de la intuición que cabe presentar *a priori* como correspondiente a ellos ... *demostraciones* que, como indica la expresión, proceden en la intuición del objeto.

Pero *construir* un concepto quiere decir representar *a priori* la intuición correspondiente. Así pues, para construir un concepto se requiere una intuición *no empírica,* que es, por consiguiente, en cuanto intuición, un objeto *individual,* pero que, pese a ello, ha de expresar en la noción, por ser construcción de un concepto (de una noción universal), la validez universal de todas las intuiciones posibles que se incluyan bajo tal concepto. Así, construyo un triángulo cuando represento el objeto correspondiente a este concepto, ya sea mediante la mera imaginación en la intuición pura o, de acuerdo con ella, sobre el papel, en

---

[7] KANT, 1781, A 716, A 734, A 735 y A 713 y ss. [Como es sabido, con «A» suele indicarse la página de la primera edición de la *Crítica;* teniendo en cuenta, sin embargo, que en las versiones españolas existentes no se recoge al margen tal paginación, damos el número de la página de las ediciones en nuestro idioma: en el presente caso, 1961, tomo II, págs. 338, 351, 352, 338 y 339.]

la intuición empírica; mas en ambos casos enteramente *a priori,* sin haber tomado pauta de experiencia alguna. La figura dibujada individual es empírica, y a la vez sirve para expresar el concepto, sin perjuicio de su generalidad, puesto que en esta intuición empírica se mira siempre únicamente el acto de la construcción del concepto, para el cual son del todo indiferentes muchas determinaciones, como, por ejemplo, la magnitud de los lados y de los ángulos; y de esta suerte se abstrae de estas diferencias, que no hacen variar el concepto de triángulo.

[Las matemáticas] se precipitan en seguida sobre la intuición, en la cual contemplan el concepto en concreto, si bien no [en una intuición] empírica, sino meramente en una que se representan *a priori,* o sea, que han construido, y en la que tiene que ser válido en general para el objeto del concepto construido aquello que se siga de las condiciones generales de la construcción.

La concepción de Kant constituye en cierto modo una fusión de las soluciones de Descartes y de Locke con la de Berkeley: las «determinaciones, como por ejemplo, la magnitud», no se atribuyen sino a «la figura dibujada individual», que, por tanto, no puede corresponder más que al «triángulo particular» de Berkeley; y si, según Kant, cabe que un razonamiento concluyente se refiera, sin embargo, a un triángulo dibujado en un papel, es que se hace abstracción de las diferencias que no provengan de las condiciones generales de la construcción. En suma, se trata de la solución de Berkeley.

Aquellas determinaciones no pertenecen, en absoluto, al objeto que se construye «mediante la mera imaginación en la intuición pura», dado que [8]

...no [se] debería indagar lo visible en la figura ni tampoco su mero concepto, y en cierto modo aprender así sus propiedades, sino que [se] debería sacar a luz lo que *a priori* [se] hubiere puesto mentalmente en ella y representado (mediante una construcción) de acuerdo precisamente con conceptos, y que, para saber algo *a priori* con mayor seguridad, no [se] debería atribuir a la cosa nada que no se siga necesariamente de lo que justo [se] hubiere puesto en ella de conformidad con su concepto.

Así pues, el *triángulo construido mediante la mera imaginación en la intuición pura,* según Kant, corresponde exactamente a la *esencia del triángulo* según Descartes, y al *triángulo general,* según Locke, y suscita idénticas objeciones que éstos,

---

[8] KANT, 1781, B XII [«B» caracteriza la paginación de la segunda edición (1787) de la *Crítica;* por las mismas razones que antes, en cast: 1928, t. I, pág. 25, y 1961, t. I, pág. 129].

juntamente con otra nueva. En efecto, el «triángulo de Kant» no debe poseer determinaciones individuales que no se sigan de las condiciones generales de su construcción; si esto quisiera decir solamente que, por ejemplo, semejante triángulo carece de espesor o incluso que está desprovisto de color alguno, no se pasaría de atribuir a la imaginación una gran capacidad de idealización, cosa que, en rigor, cabe admitir; pero es claro que Kant plantea a nuestra imaginación unas exigencias mucho más graves todavía: postula la facultad de imaginar un triángulo que no sea ni escaleno, ni rectángulo, etc., lo cual es incompatible con ciertos hechos psicológicos elementales.

§ 4. **Los juicios analíticos y los sintéticos.**—Para llegar a comprender bien el intuicionismo kantiano, que constituye la continuación del de Descartes y proporciona, al mismo tiempo, el punto de partida de su desarrollo posterior, es necesario decir algunas palabras sobre la distinción entre los juicios analíticos. En Couturat[9] vemos expuesta con admirable claridad la interpretación corriente de tal distinción:

> Es preciso ... decir, para conservar lo más posible el espíritu —si no la letra— de la doctrina kantiana, que un juicio es analítico cuando puede deducirse únicamente de las definiciones y de los principios de la lógica; y es sintético si su demostración (o su verificación) supone otros datos además de los principios lógicos y las definiciones.

Ahora bien, esta interpretación es errónea, y su influencia es un obstáculo, no sólo para la comprensión intuicionista de la epistemología de Kant, sino asimismo de las doctrinas con ella conexas.

Para llegar a una interpretación correcta es preciso confrontar la *Crítica de la razón pura* con un opúsculo más antiguo de Kant, la *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral* [«Investigación sobre la claridad de los principios de la teología natural y de la moral»] (1764). Cito, a título de ilustración, dos pasajes que, por lo demás, poseen una importancia capital.

---

[9] Couturat, 1905, pág. 246.

Sobre la claridad de los princ.[10]

A todo concepto universal se puede llegar por dos caminos distintos: o bien por *combinación arbitraria* de conceptos, o por *separación* de aquellos conocimientos que se hayan puesto en claro mediante un análisis. Las matemáticas no componen jamás definiciones de otra suerte que del primer modo. [...] La elucidación surge en este caso [...], como es manifiesto, mediante una *síntesis*.

Con las definiciones de la filosofía sucede algo completamente distinto: aquí está dado ya el concepto de la cosa, aunque confuso o no suficientemente determinado; y tengo que analizarlo...

Crítica de la razón pura[11]

... las definiciones filosóficas las efectuamos únicamente como exposiciones de conceptos dados, en tanto que las matemáticas como construcciones de conceptos fabricados originalmente; [...] éstas se efectúan de manera sintética, y *fabrican*, pues, el concepto mismo, mientras que, por el contrario, las primeras solamente lo elucidan.

... recurro a la aritmética, tanto a la general* [...] como a la de los números; en ambas se empieza por colocar, en lugar de las cosas mismas, sus símbolos, con las designaciones especiales de su aumento o disminución, sus relaciones, etc.; y luego se opera con tales símbolos de acuerdo con reglas sencillas y seguras, [...] de suerte que se dejan de lado enteramente las cosas simbolizadas mismas...

Incluso el proceder del álgebra con sus ecuaciones, a partir de las cuales obtiene por reducción la verdad juntamente con la demostración, es una construcción ciertamente no geométrica, pero sí característica, en la que se exponen en la intuición, valiéndose de símbolos, los conceptos, principalmente los referentes a la relación entre magnitudes, y [...] se garantiza que todas las deducciones están libres de errores merced a poner ante la vista todas y cada una de ellas.

Así pues, los juicios sintéticos se distinguen tanto por su fundamento como por el método que permite deducirlos a partir de aquél; y la doctrina de 1764 puede resumirse del modo siguiente: el fundamento de los juicios sintéticos consiste en definiciones, que introducen conceptos nuevos mediante combinaciones arbitrarias de ciertos conceptos primitivos (podría agregarse sin falsear demasiado la doctrina que también consiste en postulados igualmente arbitrarios), y toda definición fundada sobre tales definiciones (y postulados) se

---

10 KANT, 1764, Observación 1.ª, 1-2.
11 KANT, 1781, A 730 y A 734 [vers. cast., 1961, págs. 349 y 351].
* Lo que ahora llamamos *álgebra*. (*N. del T.*)

presenta como un cálculo simbólico, análogo al cálculo algebraico. Esta doctrina expresa un formalismo radical, que Kant, sin embargo, no admite más que para la matemática pura: para la filosofía y la física se impone el análisis.

§ 5. **El intuicionismo de Descartes y de Kant.**—Durante el período de la filosofía crítica se conserva la distinción entre método sintético y método analítico; pero a partir de entonces se reserva uno de estos métodos a la filosofía, mientras que el otro se aplica en la matemática pura y en las ciencias de la naturaleza.

Entonces el razonamiento matemático no puede ya consistir en una deducción puramente formal, ni puede seguir partiendo de definiciones y postulados arbitrarios, dado que semejante método de raciocinio no sería utilizable en las ciencias de la naturaleza, en tanto que, según Kant, estos dominios no poseen carácter científico más que en la medida en que encierren algo matemático. Es menester, pues, un principio que impida la introducción de definiciones y postulados arbitrarios; ahora bien, Kant ha enunciado tal principio en los términos que siguen [12]:

> Mas el uso de este conocimiento puro descansa en la condición de que nos sean dados en la intuición objetos a los que se pueda aplicar aquél; pues sin intuición carece de objetos todo nuestro conocimiento, y permanece, por ello, enteramente vacío;

y lo ha precisado todavía más de la siguiente forma:

> Así pues, el principio supremo de todos los juicios sintéticos es que todo objeto se encuentra sometido a las condiciones necesarias de la unidad sintética de la multiplicidad de la intuición en una experiencia posible.

Tiene interés profundizar un poco en la aplicación de este principio en la matemática pura, y muy particularmente en geometría. De acuerdo con una interpretación —por otra parte muy extendida—, en Kant el papel de la intuición se limitaría a dictarnos los axiomas geométricos que habríamos de elegir; y a partir del momento en que se hubieran elegido estos axio-

[12] KANT, 1781, A 62 y A 158 [vers. cast.: 1928, tomo I, pág. 188, y tomo II, pág. 12, y 1961, t. I, págs. 206 y 294].

mas, el papel de la intuición se convertiría en puramente heurístico, los teoremas provendrían de los axiomas en virtud de una deducción enteramente formal y podría desdeñarse el contenido intuitivo de éstos.

Ahora bien, cuando se efectúa un estudio preciso de las concepciones de Kant acerca del papel de la intuición en las matemáticas se obtienen resultados sorprendentes: una interpretación profunda habrá de subrayar las expresiones «*conducido siempre por la intuición*», «*extraer de la construcción de los conceptos*», «*proceder en la intuición del objeto*», «*tiene que ser válido en general para el objeto del concepto construido aquello que se siga de las condiciones generales de la construcción*», «*sacar a luz lo que* a priori *se hubiere representado* (*mediante una construcción*) *de acuerdo precisamente con conceptos*», que contradicen a la interpretación corriente; así pues, el papel de la intuición no se limita, en modo alguno, a dictarnos los axiomas, sino que es también la intuición, y no la lógica formal, la que dirige la totalidad del raciocinio geométrico. Y se nos harán patentes las consecuencias de esta doctrina si volvemos un momento a la ilustración que Kant mismo nos había proporcionado.

En caso de que adoptemos las concepciones usuales acerca del razonamiento matemático, la demostración del teorema geométrico a que se refería Kant exige que se apele al quinto postulado de Euclides, que no es otro que el famoso axioma de las paralelas. Por consiguiente, si se suprime este postulado, la demostración indicada por Kant no se tiene en pie.

Sin embargo, semejante opinión no es, en absoluto, compatible con las concepciones kantianas tal y como las hemos interpretado aquí. En efecto, la construcción de un triángulo y la de una recta paralela a uno de sus lados no constituyen para Kant un proceder puramente heurístico, sino que forman parte integrante de la demostración: se impone construcción porque la demostración ha de «proceder en la intuición del objeto»; entonces, el resultado de esta construcción no vendrá determinado por la elección de tales o cuales axiomas, sino —enteramente al contrario— por las «condiciones generales de la construcción», «quiéralo yo o no», como muy bien decía Des-

cartes. Por tanto, incluso si se suprimieran todos los axiomas de Euclides se acabarían por encontrar todos los teoremas de la geometría euclidiana por la sola virtud de la intuición.

De este modo, la concepción corriente según la cual los teoremas de la geometría se obtienen por deducción formal a partir de ciertos axiomas se convierte en perfectamente ilusoria. Por otra parte, esta conclusión está totalmente de acuerdo con las opiniones de Descartes; punto que voy a probar por medio de un texto sacado de la *Regla X*[13].

> Mas para que se nos aparezca todavía con mayor evidencia que este método de razonar no tiene utilidad alguna para el conocimiento de la verdad, es preciso observar que los dialécticos no pueden formar ningún silogismo en regla que conduzca a una conclusión verdadera si no [...] tienen ya conocida de antemano la verdad misma que deduzcan en su silogismo. De lo cual resulta que ellos mismos no aprenden nada nuevo de semejante forma; que, por consiguiente, la dialéctica ordinaria es enteramente inútil para quienes quieran buscar la verdad y no puede valer más que para poder exponer, en ocasiones, más fácilmente a los demás razones ya conocidas, y que, en consecuencia, es preciso hacerla pasar de la filosofía a la retórica.

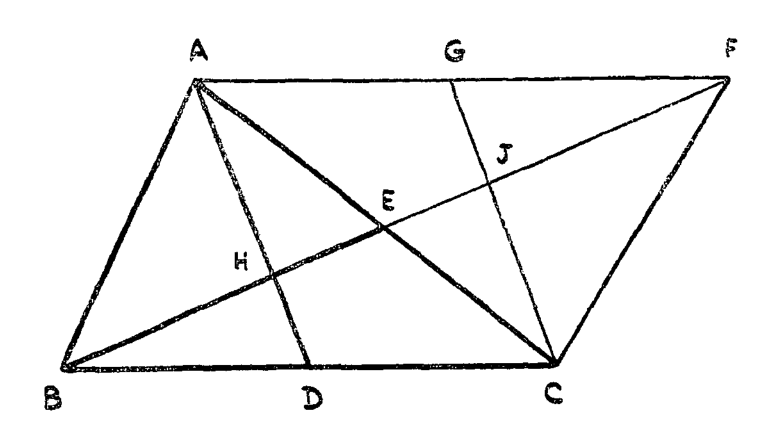
De aquí se deduce que Descartes y Kant están de acuerdo en colocar, junto al *razonamiento formal* o *silogístico*, un tipo nuevo de razonamiento al que se llamará *razonamiento intuitivo* o *constructivo*, y que la descripción que encontramos en Kant, bastante detallada, concuerda en lo esencial con las más sumarias indicaciones que da Descartes. Advirtamos, sin embargo, que sigue existiendo una diferencia entre las concepciones de uno y otro: para Kant, el razonamiento intuitivo no se aplica más que en las matemáticas, mientras que el formal conserva todo su valor para la filosofía; mas para Descartes, el razonamiento formal está desprovisto de todo valor.

Tal vez sea instructivo presentar un ejemplo un poco menos trivial de un razonamiento constructivo según las concepciones de Descartes y Kant que acabamos de explicar. Tomemos la demostración del siguiente teorema:

---

[13] DESCARTES, 1842, págs. 491-92 [vers. cast.: *Reglas...*, págs. 82-3].

Las tres medianas de un triángulo cualquiera se cortan en un punto.



Sea *ABC* un triángulo cualquiera. Para encontrar una primera mediana, *BE*, construimos ante todo el paralelogramo *ABCF;* entonces *E* se nos presenta como el punto de intersección de las diagonales *AC* y *BF;* y observamos que $BE=EF$ y que $AF=BC$.

Ahora bien, si $BD=DC$ y $AG=GF$, ha de ser $DC=AG$, y dado que $DC//AG$, *AGCD* es asimismo un paralelogramo. Por consiguiente, $GJ//AH$, luego $FJ=JH$ en virtud del teorema de Tales, y también, por ser $DH//CJ$, ha de ser $BH=HJ$.

Observemos que $BH=HJ=HE+(EF-JF)=HE+(BE-BH)=2.HE$.

De lo cual resulta que, si *AD* es la segunda mediana, corta a *BE* en el punto *H* tal que $BH=2.HE$. Y es evidente que prolongando *CH* encontraremos la tercera mediana.

§ 6. La geometría no euclídea.—No cabe la menor duda de que las concepciones de Kant concuerdan con los hechos, con tal de que se trate del estudio de la geometría euclídea a un nivel elemental, pues en este campo demostrar es, principalmente, construir: es buscar líneas auxiliares más que elaborar largas cadenas de inferencias formales. Es cierto que no acep-

tamos como demostración correcta la verificación por medio de la intuición espacial, pero si, dirigidos por ella, acertamos con las líneas auxiliares apropiadas, es casi siempre relativamente fácil formular una demostración aceptable.

El descubrimiento de la geometría no euclídea, acaecido en 1829 (N. I. Lobachevski), alteró profundamente la situación. Ahora bien, el hecho de que se reemplazaran los axiomas euclídeos por unas suposiciones distintas no es lo decisivo: lo que importa es, principalmente, que cabía utilizar los axiomas no euclídeos como punto de partida de razonamientos, que daban lugar a teoremas geométricos nuevos.

Es verdad que con mucha frecuencia se llegaba a teoremas de la geometría euclídea. Esto no presentaba inconveniente alguno en ciertos casos, dado que una y otra geometrías tienen en común numerosos teoremas; pero en otros, sin embargo, se alcanzaban resultados que eran incompatibles con los axiomas no euclídeos, y que, por tanto, parecían reducir al absurdo a éstos.

En cierto modo, esta experiencia confirma la concepción de Kant según la cual los teoremas geométricos no están determinados por la elección de tales o cuales axiomas, sino por las «condiciones generales de la construcción». No obstante lo cual, esta explicación dejó de poder mantenerse cuando los matemáticos pusieron a punto métodos que permitieron descubrir errores lógicos en todos los razonamientos de esta índole y reemplazarlos por otros, éstos correctos, que llevaban a verdaderos teoremas de la geometría no euclídea.

Parece, pues, que la existencia de estos métodos muestra que puede haber demostraciones matemáticas correctas que no hagan intervenir la intuición, o que, al menos, no recurran a la misma intuición que interviene en la geometría euclídea.

Pero no podemos continuar tratando de esta cuestión sin perjudicar la continuidad histórica. En efecto, si bien el descubrimiento de la geometría no euclídea ha contribuido, por su parte, a la emancipación del razonamiento geométrico con respecto a la intuición espacial, su influencia se limitó a la práctica: tal descubrimiento no dio lugar a un debate a fondo acerca de la teoría del razonamiento matemático en general; y

han sido sobre todo ciertos estudios algo más recientes en diversos dominios los que han suscitado tal debate: cf. el capítulo 3, §§ 17-19.

§ 7. Formas recientes del intuicionismo: F. A. Lange, L. Brunschvicg, E. Goblot, H. Poincaré, L. E. J. Brouwer.—Pese a lo dicho, no será inútil consagrar ya desde ahora algunas líneas a las nuevas formas del intuicionismo que se han manifestado posteriormente. Algunas de ellas se encuentran principalmente entre filósofos, mientras que otras están más que nada representadas por matemáticos; y de una manera general cabe decir que para los filósofos se trata, en primer lugar, de asentar una interpretación de los nuevos métodos del razonamiento matemático, en tanto que lo que para los matemáticos pide una revisión crítica es, con frecuencia, el contenido mismo de las nuevas teorías.

El intuicionismo filosófico (en el especial sentido indicado por el presente contexto) proviene principalmente del renacimiento kantiano que tuvo lugar en Alemania entre 1860 y 1870; pueden mencionarse, por ejemplo, las ideas de F. A. Lange, que fue uno de los iniciadores del movimiento neokantiano.

Desde hace largo tiempo se tiene la costumbre de ilustrar la deducción discursiva según la silogística tradicional por medio de ciertos diagramas geométricos. Ahora bien, Lange hizo observar, con gran sutileza, que, desde el punto de vista del intuicionismo kantiano, esta ilustración no constituye solamente un instrumento heurístico más o menos útil, sino que establece una relación directa entre la silogística y la intuición espacial, con lo que permite rehabilitar la deducción silogística como método de raciocinio adaptado a las ciencias matemáticas.

Hoy sabemos que cabe establecer semejante relación con la intuición espacial no sólo para la silogística tradicional, sino asimismo para un sistema lógico mucho más amplio y más fecundo, que proporciona un aparato adecuado para la deducción formal en matemáticas. De lo que se deduce que incluso unas teorías matemáticas abstractas que a primera vista no parezcan poseer más que un valor discursivo (en el sentido

peyorativo implicado por las concepciones de Descartes y de Kant) podrían, en rigor y pese a ello, quedar incorporadas a las matemáticas intuitivas preconizadas por estos dos filósofos.

Si atribuyo a Brunschvicg una concepción intuicionista de las matemáticas, no lo hago porque presente una teoría más o menos determinada del razonamiento matemático, sino porque tiene una fuerte tendencia a combatir las teorías matemáticas y lógicas que los filósofos y matemáticos intuicionistas, por lo general, rechazan. Mas apenas cabe esperar que una actitud tan polémica contribuya a solucionar los problemas que nos ocupan.

Goblot, por el contrario, presenta una teoría del razonamiento matemático. Voy a permitirme citar el resumen que él mismo ha dado de ella [14].

> Al cabo de diez años de investigaciones la solución surgió en mi espíritu bruscamente, una mañana de febrero de 1906; y es una idea tan sencilla que no me explico cómo he podido tardar diez años en descubrirla: DEDUCIR ES CONSTRUIR. Lo único que se demuestra son razonamientos hipotéticos: se demuestra que una cosa es consecuencia de otra. Para ello, se construye la consecuencia con la hipótesis; y aquélla es necesaria, por más que introduzca un elemento de novedad, no porque estuviera *contenida en* ésta, sino porque se la ha obtenido mediante operaciones *reguladas*, es decir, tales que ninguna de ellas sea arbitraria. ¿Y cuáles son las reglas de estas operaciones?: ¿reglas de lógica formal? En modo alguno, sino proposiciones anteriormente admitidas, ya sea en virtud de demostraciones precedentes, ya a título de definiciones o de postulados; y la aplicación de estas proposiciones a las operaciones constructivas constituye precisamente el papel y la función del silogismo en el raciocinio.

Se trata en este caso de una concepción intuicionista que trasluce una gran influencia de la tradición kantiana; no obstante lo cual, el progreso con respecto a las ideas de Kant es considerable: pues en éste las «*condiciones generales de la construcción*» se mantenían implícitas, estaban dictadas por la intuición, de suerte que una alteración de los axiomas de la geometría, por ejemplo, había de carecer de efecto.

En Goblot, las condiciones se presentan como postulados libremente adoptados; y esta reforma del intuicionismo kantiano tiene algunas consecuencias sumamente importantes:

1) los postulados tienen que formularse explícitamente;

---

14 GOBLOT, 1922, págs. 50-1.

2) cabe reemplazar unos postulados por otros distintos, y
3) puede otorgarse un modesto papel a la lógica formal.

Da este modo logró Goblot restablecer, en principio, el acuerdo entre el razonamiento matemático tal y como se presenta actualmente y la teoría epistemológica de este razonamiento. Por otra parte, no dio a su teoría una forma que le permitiera efectuar un análisis más o menos detallado de un razonamiento matemático cualquiera; más adelante veremos, sin embargo, que una versión suficientemente completada y refinada de esta teoría permitiría indudablemente llevar a cabo tal análisis.

Goblot no especifica el papel de la intuición ni la índole propia de las construcciones matemáticas, cosa que, sin embargo, no representa un inconveniente demasiado grave; y, por lo demás, una tendencia característica del intuicionismo contemporáneo es la de dar al término «*intuición*» un sentido bastante indeterminado.

Es preciso que mencionemos ya a Poincaré en el presente contexto, puesto que criticó ciertas tendencias de las matemáticas de su tienpo y subrayó la importancia de cierto elemento intuitivo que en ellas se encuentra: según él, este elemento se manifiesta sobre todo en la aplicación del razonamiento por inducción completa, que no tolera ser reducido a la silogística. Tendremos luego ocasión de estudiar las ideas de Poincaré más ampliamente, en la medida en que se refieren a la invención matemática: cf. el capítulo 4, § 26 [15].

Un poco más tarde, Brouwer no solamente efectuó una crítica parecida de las tendencias no constructivas en la matemática moderna, sino que realizó además un esfuerzo por asentar las matemáticas mediante un método puramente constructivo y sobre un fundamento perfectamente intuitivo.

Este esfuerzo no ha carecido de resultados, pero el desarrollo de la matemática intuicionista por Brouwer y su escuela ha suscitado ciertas dificultades que importa mencionar ahora:

1) No es posible establecer de nuevo el conjunto de las

---

15 Véase Beth, 1955, acerca del raciocinio por inducción completa.

matemáticas modernas valiéndose de los métodos constructivos.

2) Incluso la aplicación de la lógica formal ha de someterse a ciertas restricciones; lo cual demuestra, de rechazo, que su importancia para las matemáticas corrientes es bastante considerable.

3) Para otorgar a la construcción matemática toda la libertad posible es preciso partir de un fundamento intuitivo sumamente primitivo; y la caracterización epistemológica de semejante fundamento no es nada sencilla.

Desde un principio Brouwer rechazó la intuición espacial, pero conservando la temporal; y luego esta última ha quedado reemplazada por la intuición del continuo. Pero, a fin de cuentas, se llega a una concepción que Heyting formula de la manera siguiente [16]:

> En la práctica, se puede empezar por este concepto [el de número natural] como algo intuitivamente claro; pero es posible apoyarse en conceptos más fundamentales, por ejemplo, del modo que sigue ... En la base se encuentra, ante todo, el concepto de entidad, es decir, el de un objeto o una sensación que consideramos como si estuviera dada separadamente del resto del mundo; luego es posible distinguir esta entidad de otra, y podemos, por fin, representarnos una repetición indefinida de este mismo proceso. Pero tampoco este análisis es definitivo.

Tiene gran importancia, teniendo en cuenta la finalidad peculiar del presente trabajo, que examinemos las distintas concepciones intuicionistas; pues el intuicionismo se define como un esfuerzo por adaptar cuanto sea posible este razonamiento al proceder real del pensamiento (en lugar de a unos esquemas tomados de una lógica formal dada de antemano), tiende a la introspección y no desdeña, en modo alguno, ofrecer, al margen de los razonamientos «técnicos» y más o menos formalizados, otras explicaciones más intuitivas. Por consiguiente, es completamente natural esperar que un estudio del intuicionismo nos proporcione datos inapreciables acerca de los pasos reales por los que procede el pensamiento matemático, e incluso los del pensamiento discursivo en general.

---

16 HEYTING, 1955, pág. 14.

Sin embargo, todo parece indicar que esta expectativa, con ser tan natural y razonable, no se ha realizado. En el caso de Kant cabía tener la impresión de encontrarse frente a una imagen más o menos fiel de lo que sucede en el espíritu del matemático; en especial, nos vemos llevados a considerar los elementos de la intuición espacial o temporal como los materiales últimos de un pensamiento puramente sintético o constructivo.

En lo que se refiere a las concepciones de Goblot y, en particular, las de Brouwer, tal interpretación resulta ser ilusoria: la «entidad», según Heyting, no es un *dato* elemental en sentido estricto, sino que se la considera, si es que no se la *propone,* en cuanto elemento de construcción.

Pero entonces, el concepto mismo de *construcción* deja de ser tan nítido como parecía serlo antes: sólo lo es en virtud de la convención que nos prohibe, en un contexto matemático determinado, proceder al análisis de la génesis de las entidades utilizadas. En cuanto al análisis epistemológico y el psicológico, semejante prohibición carece de toda autoridad, pero, dado que el razonamiento matemático tiene que respetarla, es evidente que semejantes análisis se verán obligados a buscar más allá de los límites convencionales impuestos a este último razonamiento.

A esta primera explicación se añade la consideración que sigue. En el pensamiento automático, esto es, en el complejo de actividades mentales que eventualmente conducen a la solución razonada de un problema matemático, conviene distinguir al menos dos fases consecutivas, o más bien tres, que son las siguientes:

1) La fase de la *búsqueda.* En ella no se impone restricción alguna al pensamiento: todos los medios son buenos con tal de que nos acerquen al objetivo. Esta es la fase del pensamiento matemático espontáneo, original, verdaderamente inventivo e incluso creador.

2) La fase del *arreglo,* que tiende a presentar la solución, una vez que se la haya encontrado, bajo la forma de un razonamiento correcto. Esta fase puede también

exigir cierta inventividad, pero no una verdadera creación.

3) La fase de la *comprobación,* que consiste en repensar el razonamiento para comprobar si es correcto y si verdaderamente conduce a una solución del problema planteado.

Ahora bien, las publicaciones matemáticas no reproducen, por lo general, más que la fase 3); cosa que basta para que el lector, repensando a su vez el raciocinio, pueda juzgar acerca del valor científico de la solución propuesta. Pues la fase 2) no presenta en sí misma un interés independiente: si la tentativa de arreglo fracasa es que la solución obtenida es incorrecta, incompleta o confusa, de modo que habrá que volver a la fase 1); y esta última es, en general, tan irregular que apenas se la puede reproducir de forma comprensible: en un momento dado se cae en la cuenta, con cierta sorpresa, de que se ha alcanzado la meta, y no sería nada fácil señalar el camino por el que se haya llegado allí.

De estas consideraciones parece inferirse que un simple análisis de los razonamientos matemáticos, aun en caso de que éstos se tomen de las matemáticas intuicionistas, no proporcionará unos datos tales que permitan reconstruir el pensamiento matemático productivo. Sin embargo, esto no demuestra que semejante análisis, unido a otros métodos de distinto carácter, no nos haya de otorgar unas informaciones inapreciables.

Antes de terminar este capítulo me parece indicado consagrar algunas palabras a las ideas de J. Cavaillès y de A. Lautman. La crítica que en este último encontramos del formalismo de Hilbert, del intuicionismo de Brouwer y del logicismo de la escuela de Viena está inspirada, según me parece, por una orientación demasiado exclusivamente platonista, unida a una subestimación del desarrollo científico que ha creado el punto de partidas de estas distintas tendencias.

En Cavaillès encontramos un espíritu más abierto a los progresos contemporáneos, por más que su punto de vista filosófico no le permita siempre juzgar correctamente las di-

versas opiniones. Con todo, es muy de lamentar que un destino trágico no haya permitido a estos dos pensadores desarrollar sus ideas hasta su completa madurez.

Mas no quiero continuar esta digresión, dado que la finalidad principal de este capítulo consistía en mostrar el carácter inadecuado de la silogística tradicional en lo que se refiere al problema del análisis del razonamiento matemático; conclusión acerca de la cual los autores citados, pese a lo diferentes que con frecuencia son sus orientaciones, se muestran de acuerdo.

2 LA INTERPRETACION PSICOLOGICA DEL RAZONAMIENTO MATEMATICO

§ 8. **J. Stuart Mill.**—Para caracterizar el empirismo radical de Mill voy a citar a continuación su examen del principio de contradicción, que nos proporciona un hermoso ejemplo de su método [1].

> Una aserción afirmativa y su negación no son dos aserciones independientes, vinculadas entre sí sólo por ser mutuamente incompatibles: pues el que, si la negación es verdadera, la afirmación haya de ser falsa es meramente, en realidad, una proposición idéntica, ya que la proposición negativa no afirma nada más que la falsedad de la afirmación, y carece de todo otro sentido o significación ulteriores. De suerte que el *principium contradictionis* debería despojarse de la ambiciosa fraseología que le da el aspecto de una síntesis que impregnaría la naturaleza, y debería enunciarse de una forma más sencilla, la de que la misma proposición no puede ser, a la vez, falsa y verdadera... Considero que es, lo mismo que los otros axiomas, una de nuestras primeras y más familiares generalizaciones de la experiencia. Y entiendo que su fundamento original consiste en que creer y descreer son dos estados mentales distintos que se excluyen mutuamente; cosa que sabemos por medio de la más sencilla observación de nuestra propia mente.

En estas palabras hay una curiosa ausencia de reflexión lógica: a primera vista parece que creer y descreer se conciben como dos estados mentales dados, en cuanto fenómenos, independientemente uno del otro; y en tal caso sería natural interpretar la afirmación y la negación como expresión respectiva de uno y otro; pero esta interpretación implica que la afirmación y la negación serían dos aserciones independien-

---

[1] MILL, 1843, libro II, cap. VII, § 5.

tes vinculadas en virtud del hecho —asentado generalizando ciertos datos de la introspección— de ser incompatibles, y Mill rechaza esto último.

En consecuencia, lo único que podemos hacer es concebir la creencia, según Mill, como un estado mental dado en tanto que fenómeno, y la descreencia como ausencia de creencia. Sin embargo, esta interpretación hace intervenir la noción de negación, y si se la da por supuesta, ya no es necesario recurrir a la observación para darse cuenta de la incompatibilidad entre creer y descreer.

Cabe objetar, además, que la idea misma de que la introspección demostraría tal incompatibilidad prueba que la psicología utilizada no es nada sólida. Pues para comprobar la incompatibilidad sería preciso experimentar ambas cosas a la vez, lo cual, según Mill, es imposible; pero me parece que los hechos contradicen esta concepción milliana: puede suceder que experimentemos ambas al mismo tiempo, y en tal situación sentimos, indudablemente, un conflicto interior. Acaso sea la necesidad de tal conflicto lo que Mill quiere expresar al decir que el creer y el descreer se excluyen, pero entonces su exclusión mutua cesa de responder a la exclusión mutua de la afirmación y la negación.

En resumen: en su concepción del silogismo, y especialmente en la doctrina según la cual toda inferencia va de particulares a particulares, Mill vuelve a adoptar la posición de Descartes, tal y como la hemos estudiado en el capítulo 1. Se puede decir que, en cierta medida, estas ideas se verán confirmadas por el análisis del raciocinio lógico que presentaremos en el § 23; sin embargo, Mill desconoce el papel de la generalización, cosa que se manifiesta, principalmente, en sus tentativas de reducir todos los principios generales, incluso los de la matemática pura, a generalizaciones de ciertos datos de la experiencia.

§ 9. La crítica de W. Stanley Jevons.—Jevons cuenta que durante veinte años estudió en forma más o menos continua los libros de Mill, y que a lo largo de catorce años se le obligó a seguirlos en sus cursos universitarios. Sólo diez años des-

pués comenzó a descubrir la fundamental falsedad de lo que describe como «un conjunto de escritos profundamente ilógicos».

Entonces se decidió a someter las ideas de Mill a un examen sistemático [2].

> Mas, por mi parte, no me resigno a seguir viviendo en silencio bajo el íncubo de mala lógica y de mala filosofía que las obras de Mill nos han impuesto... Si la filosofía de Mill es falaz y falsa —según estoy convencido—, mostrar que así es tiene que rendir a la verdad un servicio indispensable; y ésta es la pesada tarea a la que, por fin, me siento obligado a entregarme.

La prematura muerte de Jevons le impidió realizar su programa. Sin embargo, pudo publicar, de 1877 a 1879, cuatro artículos críticos sobre distintos puntos de la filosofía de Mill; artículos que están recogidos en *Pure Logic* (compilación póstuma) juntamente con un quinto estudio que pudo ser completado suficientemente. Por lo demás no dejó más que numerosos borradores inacabados *.

En sus artículos sobre «El razonamiento geométrico» [3], Jevons hace ver que Mill defiende la postura siguiente:

1) en la realidad no existen líneas perfectamente rectas;
2) experimentamos en la mente con líneas rectas imaginarias;
3) éstas se parecen exactamente a las líneas rectas reales;
4) si tales rectas imaginarias son perfectamente rectas, no nos permitirán demostrar las verdades de la geometría, y
5) si son perfectamente rectas, las líneas rectas reales, que se parecen *exactamente* a ellas, tienen que ser perfectamente rectas; *ergo, existen líneas perfectamente rectas.*

Esta observación, en sí curiosa, tiene importancia para nosotros porque proporciona a Jevons el punto de partida para mostrar, en su artículo sobre los «Semejantes», que Mill no es psicologista más que de mala gana. Pues, tras haber com-

---

[2] JEVONS, 1890, pág. 201.

* Esto es, además de sus obras *Elementary Lessons in Logic* (1870), *The Principles of Science. A Treatise in Logic and Scientific Method* (1874) (del que hay versión castellana: *Los principios de las ciencias*, Buenos Aires, Espasa Calpe [«Historia y filosofía de la ciencia»], 1946), *Primer of Logic* (1878) (también con versión castellana: *Lógica*, 2.ª ed., Madrid, Pegaso, 1952) y *Studies in Deductive Logic* (1880), sin contar las dedicadas a otras ciencias. (*N. del T.*)

[3] JEVONS, 1890, pág. 205.

probado que en el mundo exterior faltan los objetos que serían apropiados para realizar los experimentos cuyo resultado, una vez generalizado, justificaría los axiomas de la geometría, se encuentra forzado a recurrir a experimentos mentales con objetos imaginarios; tras de lo cual, sin embargo, Mill se ve obligado a asimilar estos objetos imaginarios a los objetos reales que se presentan en el mundo exterior, ya que

1) este paso es necesario para justificar la aplicación a los objetos del mundo exterior de unos principios geométricos fundados sobre experimentos mentales efectuados sobre objetos imaginarios, y
2) el empirismo de Mill le prohibe aceptar la creación de objetos imaginarios por un acto autónomo del espíritu: éste no puede fabricar más que copias de objetos que existan en el mundo exterior.

A fin de cuentas, se puede decir que en Mill los axiomas de la geometría se presentan como *generalizaciones de experimentos puramente imaginarios*; y, en general, cabe decir que su psicologismo se funda sobre una psicología especulativa, no empírica.

§ 10. E. Mach, T. Ziehen, G. Störring y G. Heymans.—Acaso sorprenda la comprobación de que el examen de las diversas concepciones sobre las relaciones entre la lógica y la psicología nos hace retornar constantemente a las cuestiones referentes a los fundamentos y el método de la geometría. Pero este fenómeno, a primera vista tan curioso, no es difícil de explicar. A partir de Platón y de Aristóteles, el razonamiento geométrico quedó casi como el único ejemplo indudable y no trivial de deducción lógica; luego, Descartes y Kant confirieron un interés adicional al estudio de este razonamiento al negar que tenga carácter lógico y al interpretarlo como una sucesión de comprobaciones vinculadas a una sucesión de construcciones intuitivas; y, debido a las prolongadas discusiones sobre esta doctrina, las diferentes cuestiones relativas a los principios de la lógica y de la geometría acabaron por entrelazarse inextricablemente. (Observemos que, después de todo,

la concepción de Mill no se distingue de la doctrina de Descartes y de Kant más que porque reemplaza la construcción intuitiva por el experimento mental.)

Las ideas de Mach constituyen, por así decirlo, una síntesis de las doctrinas de Kant y de Mill[4].

> Mill ha hecho hincapié en que por medio del silogismo no se puede adquirir un concepto que no se tuviera de antemano, dado que no se tiene derecho a afirmar la [premisa] mayor en forma general mientras no esté garantizado el caso especial, y, por lo tanto, la conclusión (...). Kant había reconocido ya mucho antes que ciencias tales como la aritmética y la geometría no se constituyen por medio de puras deducciones lógicas, sino que necesitan otras fuentes de conocimientos (...). La lógica no proporciona conocimientos nuevos; entonces, ¿de dónde provienen? Su origen se encuentra en la *observación*, que puede ser «exterior», sensorial o «interior», relativa a nuestras nociones.

Mach se diferencia de Kant en que reconoce la existencia de la deducción lógica, que en él asume, incluso, una tarea específica, si bien harto modesta[5].

> Sin embargo, la operación lógica no es inútil: nos permite darnos cuenta de la interdependencia de nuestros conocimientos, y nos evita el esfuerzo de buscar un fundamento especial para un teorema dado cuando se encuentre ya incluido en otro.

Sin embargo, no le interesa, en absoluto, la estructura propia de la deducción lógica; cosa que explica, a la vez, que no haga ningún esfuerzo por someterla a un análisis psicológico. Con todo, de una manera general, me parece que Mach da pruebas de una gran finura psicológica en sus análisis del pensamiento científico, como veremos en el hermoso ejemplo que reproduciremos en el § 11.

Con Ziehen caemos de nuevo en el mismo género de psicología especulativa que acabo de señalar en Mill[6].

> En el pensamiento real sucede a menudo que, en las inferencias, uno o incluso varios lemas no se piensan más que de forma pasajera y vaga, y que, en consecuencia, tales lemas no se formulan bajo la forma de un enunciado completo (...). Sin embargo, es exacto que cabe siempre reducir los hechos psicológicos a cierto esquema <infe-

---

4 MACH, 1906, págs. 304-5 [vers. cast., págs. 240-1 y 246].

5 MACH, 1906, pág. 307 [en la vers. cit. debería corresponder a la página 248, pero parece haberse omitido este período en la traducción].

6 ZIEHEN, 1920, págs. 393-4.

rencial>, y que, pese a todo, el lema saltado en la formulación tiene que haber colaborado de un modo u otro. De la misma manera que gran cantidad de observaciones psicológicas nos obligan a admitir la existencia, junto a las nociones conscientes, de las nociones llamadas inconscientes o latentes, esto es, de excitaciones de la corteza [cerebral] que no están acompañadas por procesos psíquicos, nos vemos asimismo conducidos a reconocer la existencia de procesos de asociación que no están acompañados por juicios en el sentido de procesos psíquicos, pero que equivalen a juicios y participan de forma esencial en la obtención de conclusiones.

Basta la observación siguiente para hacer patente lo absurda que es esta concepción: gracias a investigaciones bastante recientes sabemos hoy que el sistema de axiomas adoptado por Euclides para la geometría era incompleto, de modo que, forzosamente, la mayoría de las demostraciones que da presentan lagunas; por consiguiente, según Ziehen, sería preciso admitir que en Euclides había procesos de asociación equivalentes a enunciados geométricos que, unidos a los axiomas cuyo enunciado daba, constituyan un sistema de axiomas adecuado.

(Voy a permitirme interrumpir el examen de las ideas de Ziehen y de sus contemporáneos para explicar el fenómeno, a primera vista desconcertante, de que se formulen y acepten argumentaciones con lagunas. A mi juicio, lo que le dispone al hombre a defender y aceptar afirmaciones desprovistas de un fundamento sólido es su curiosidad; y lo único que le permite pasar del estadio «mítico» al «filosófico» es el espíritu y el método científicos. Pues si no aceptamos ciertos razonamientos que para Euclides y sus contemporáneos eran perfectamente concluyentes, es debido a que nos hemos hecho más exigentes en ciertos respectos. En suma, puede decirse que la presión crítica de sus colegas es lo que hace que el lógico o el matemático de nuestros días no elaboren ni acepten más que argumentaciones que respeten ciertas normas usuales; y si tales normas se incrementan, se verá obligado a adaptarse a ello.)

Es evidente que, si se aplicase consecuentemente, el método de Ziehen haría inútil toda investigación experimental sobre la psicología del pensamiento. En efecto, Ziehen postula la conformidad del pensamiento real con las exigencias de la lógica formal (que, además, supone fijadas de una vez para siempre), y se muestra dispuesto a eliminar toda divergencia introduciendo procesos inconscientes apropiados; es patente

que, en definitiva, la psicología del pensamiento no será más que una traducción de la lógica formal a una terminología psicológica.

Störring, por el contrario, realizaba verdaderos experimentos [7]; así, presentaba a los sujetos unas premisas destinadas a suscitar en ellos una inferencia, por ejemplo:

b es menor que *a*
c es menor que *b*
———
luego...

o bien

todos los *i* pertenecen al género *o*
todos los *z* pertenecen al género *i*
———
luego...

Y se interrogaba a los sujetos acerca del método aplicado para llegar a la conclusión obtenida.

Aun cuando, naturalmente, la reacción de los sujetos fuese en ambos casos aproximadamente la misma, conviene advertir que, de acuerdo con las teorías lógicas corrientemente admitidas, los dos casos no son enteramente análogos. Pues en el primer caso la conclusión evidente (*c* es más pequeño que *a*) no está justificada más que si se admite una tercera premisa, por ejemplo,

para todos los *x*, *y* y *z*, si *y* es menor que *x*
y *z* menor que *y*,
z es menor que *x*.

En el segundo caso la adjunción de una tercera premisa análoga es superflua. La diferencia entre uno y otro caso se explica por el hecho de que la relación entre la especie y el género se considera como una noción propia de la lógica, de modo que cabe aplicar en el raciocinio las propiedades generales de esta relación sin mencionarlas, en tanto que la rela-

[7] STÖRRING, 1916, págs. 194 y ss.

ción *menor que* es una noción extralógica, por lo cual no es posible aplicar sus propiedades sin enunciarlas en forma de premisa. Y si bien el límite entre las nociones lógicas y las extralógicas no puede fijarse sin apelar a criterios en parte arbitrarios, se impone efectuar una distinción entre los dos tipos de nociones.

Para terminar este análisis de algunas versiones bastante divergentes del «psicologismo», quiero examinar las ideas del filósofo y psicólogo holandés G. Heymans[8]. Este defiende el *método analítico*, que se opone tanto al *método genético* de la tradición inglesa desde Locke[9] como al *método criticista* de Kant y de sus adeptos: comprueba que el desarrollo de las ciencias no está enteramente condicionado por los datos de las observaciones, sino que hace intervenir, asimismo, unos principios generales o axiomas, que se manifiestan en ciertas *actiones mentis occasione experientiae* [actos intelectuales con ocasión de la experiencia]; nuestra convicción de la verdad de los resultados de la investigación científica está fundada en gran parte en la evidencia que atribuimos a tales principios o axiomas, de suerte que para justificar aquella convicción será necesario explicar y justificar esta evidencia.

Tales consideraciones dan lugar al siguiente programa para una epistemología: ante todo hay que elaborar el contenido exacto de los principios generales o axiomas mediante un examen analítico del pensamiento científico; y luego se podrá intentar la explicación y la justificación de la evidencia de los principios o axiomas.

Cabe preguntarse si en la ejecución de semejante programa se aplicarán verdaderamente los métodos psicológicos propiamente dichos, por ejemplo, algún estudio de científicos en su laboratorio; en la mayoría de los casos se tiene la impresión de que Heymans piensa más bien en un análisis de los resultados del pensamiento científico, en cuyo caso se podría siempre prever la aplicación a tales análisis de ciertos conceptos

---

8 HEYMANS, 1923.

9 Aun cuando el método genético al que Heymans se opone es muy distinto del que preconiza Piaget, conviene subrayar que las ideas de aquel autor tampoco constituyen anticipación alguna de la epistemología genética.

tomados de la psicología; y, hablando globalmente, tal es la forma en que, de hecho, procede Heymans en la primera fase de su investigación.

En cuanto a la segunda fase prevista, no se advierte claramente si exige una investigación separada llevada a cabo por un método distinto. A menudo parece que, según Heymans, una vez que se conozca el contenido exacto de los axiomas o principios, éstos adquirirán tal evidencia que toda justificación ulterior será inútil.

§ 11. E. Husserl y su pretendido antipsicologismo.—Tras haber examinado algunas muestras del «psicologismo» del siglo XIX difícilmente se podrá tener la impresión de que se trate de una tendencia muy uniforme: ciertas versiones no se basan sino en una psicología especulativa que tras una inspección crítica se transforma en una lógica disfrazada, y otras no serían, en absoluto, incompatibles con una lógica formal propiamente dicha. Sin embargo, en conjunto, estas distintas versiones del «psicologismo» han ejercido una influencia perjudicial, ya que desviaron las inteligencias del estudio de la lógica matemática precisamente cuando ésta comenzaba a desarrollarse.

De acuerdo con las concepciones corrientes —por lo demás, justas en términos generales—, que voy a permitirme resumir tomando cierto número de datos de la obra de M. Farber *The Foundation of Phenomenology*, el desarrollo intelectual de Husserl estuvo muy influido por sus estudios de las ciencias exactas y de su filosofía. Siendo estudiante en Berlín, se formó en las matemáticas con Karl Weierstrass, uno de los fundadores del análisis moderno, y obtuvo el doctorado con una tesis intitulada *Beiträge zur Variationsrechnung* [«Aportación al cálculo de variaciones»], que, desgraciadamente, no ha sido publicada; luego, bajo la dirección de F. Brentano, profundiza sus estudios de filosofía y psicología, y en 1887 recibe la «habilitación» [colación del permiso para enseñar en centros universitarios] con una tesis *Ueber den Begriff der Zahl* [«Sobre el concepto de número»], tesis que no se ha publicado, pero cuyo contenido está incorporado a la *Philosophie der Arithmetik* (1891). A este mismo período corresponden una crítica del lógico

E. Schröder (1891), una polémica con A. Voigt (1891-94) y el artículo «Psychologische Studien zur elementaren Logik [Estudios psicológicos sobre la lógica elemental]» (1894). En 1894, Frege publica una crítica de la *Philosophie der Arithmetik* que desencadena el desarrollo del antipsicologismo husserliano; tendencia que se manifiesta en los *Prolegomena* (1900), en los que también se muestra la influencia de Leibniz y de Bolzano.

Sin embargo, Farber tiene razón al ponernos en guardia frente una subestimación de la continuidad del pensamiento husserliano; continuidad que se hace visible, entre otras cosas, en el hecho de que ciertos pasajes de las *Logische Untersuchungen* [«Investigaciones lógicas»] se habían redactado durante el período del psicologismo. Un documento importante al respecto es el «Bericht über deutsche Schriften zur Logik aus dem Jahre 1894 [Informe sobre los trabajos alemanes sobre lógica correspondiente al año 1894]», que Husserl no publicó hasta 1897; Farber menciona el estudio que en este informe se hace de la conferencia de E. Mach «Ueber das Prinzip der Vergleichung in de Physik [Sobre el principio de comparación en la física]», a la que Husserl califica de «brillante», pero se le escapa por completo la capital significación de tal pasaje. Como encuentro en él la confirmación definitiva de algo que yo venía presumiendo (acerca del origen del programa según Husserl de una filosofía fenomenológica), sospecha que en otros lugares no he apuntado más que de pasada, me permito reproducir aquí la conferencia de Mach, en la medida en que es pertinente para el presente contexto [10].

Semejante relación entre dos sistemas de conceptos, en la que encontramos una conciencia clara y distinta, tanto de la desemejanza dos a dos de conceptos homólogos como la conformidad de las vinculaciones lógicas en el interior de cada par homólogo de conceptos, se suele llamar *analogía*. Esta constituye un medio eficaz para dominar campos heterogéneos de hechos mediante una concepción uniforme; y así se abre claramente la vía para desarrollar una *fenomenología general* que abarque todos los dominios de la *física*.

Solamente el procedimiento que acabo de dibujar nos permite extraer lo que nos es indispensable para describir inmediatamente grandes dominios de hechos, o sea, el *concepto abstracto* general. En este orden de ideas me veo obligado a plantear una pregunta pedante, pero inevitable: ¿qué es un *concepto*? ¿Es una noción vaporosa más, con

---

[10] MACH, 1897, págs. 272-3.

todo, intuitiva? No. Unicamente en los casos más sencillos se presenta como un *fenómeno accesorio*: piénsese en el concepto de «coeficiente de autoinducción» y búsquesele una representación intuitiva. Entonces, ¿acaso no será el concepto otra cosa que una *palabra*? La aceptación de esta desesperada idea, propuesta recientemente por un ilustre matemático, no haría retroceder mil años a la escolástica más ínfima...

Con objeto de hacer que resalten las relaciones entre estas explicaciones de Mach y las ideas de Husserl, conviene situar la cita en su propio contexto histórico. El desarrollo de las teorías físicas durante el siglo XIX se caracteriza por la lucha entre el método fenomenológico y el mecánico o constructivo. Los partidarios de este último trataban de explicar los fenómenos físicos construyendo modelos mecánicos: así, los fenómenos térmicos se explicaban por la teoría cinética de los gases, que recurría a principios atomistas, y los fenómenos ópticos, por la teoría ondulatoria, que se valía de la concepción del éter como fluido elástico.

Ahora bien: las teorías mecánicas presentaban a menudo ciertos inconvenientes: 1) les faltaba una relación directa con la índole de los fenómenos que había que explicar; por ejemplo, los fenómenos térmicos —en la medida en que se los conocía— no poseían un carácter atómico; 2) en lo que se refiere a los detalles, eran forzosamente muy arbitrarios; así sucedía con la elasticidad del éter, ya que hipótesis enteramente opuestas eran igualmente compatibles con los datos observados; 3) y a la vez eran poco plausibles: todas las observaciones que se podían hacer sobre la elasticidad del éter eran incompatibles con lo que se sabía de la elasticidad de los cuerpos ponderables.

Por ello, físicos y químicos como Duhem, Mach, Ostwald y A. Voigt recomendaban la elaboración de unas teorías más sobrias, en las que no interviniesen sino las suposiciones estrictamente indispensables. La termodinámica constituye el ejemplo clásico de una teoría de este tipo, fenomenológica o descriptiva.

No debe sorprender que a Husserl le interesase y admirase tanto el discurso de Mach: ya en la *Philosophie der Arithmetik*[11] había aludido a la posibilidad de una influencia de este

[11] HUSSERL, 1891, pág. 237.

pensador, y, por otra parte, en el mismo libro[12] habla de la «descripción de un fenómeno»; así pues, no sería exacto decir que la lectura de la conferencia de Mach hubiera provocado en Husserl un cambio de actitud, de tendencia o de método: a lo sumo, le habría permitido darse cuenta del carácter peculiar de su método y sus fines; de suerte que su antipsicologismo no es, en modo alguno, una rebelión contra la psicología o contra su influencia en distintos campos, sino que en su origen no es otra cosa que una rebelión contra la aplicación en psicología de ciertos métodos, y se manifiesta por una tentativa de asentar una psicología descriptiva o fenomenológica, análoga a la física y a la química fenomenológicas tal y como las propagaban Duhem, Mach, Ostwald y Voigt. Más tarde, la necesidad de mantener una pretensión hegemónica de esta psicología depurada sobre los demás dominios científicos le obligó a Husserl a erigir su psicología descriptiva o fenomenológica en filosofía propiamente dicha.

En cuanto a su contenido, la psicología, según Husserl, es especulativa, y no se diferencia de los sistemas de Mill y de Ziehen más que por la admisión de otros principios.

§ 12. **F. Enriques y G. Mannoury.**—Enriques y Mannoury se distinguen de los investigadores precedentes por haber sido a todo lo largo de su vida matemáticos profesionales, pese a intereses y actividades con frecuencia sumamente divergentes.

Las concepciones de Enriques recuerdan las líneas maestras de las ideas de Heymans, de las que ya nos hemos ocupado[13].

Vamos a oponer, pues, al concepto tradicional de la lógica gramatical —o, más en general, simbólica— el de una *lógica psicológica,* que en los esquemas y los signos no se preocupe tanto por las fórmulas escritas cuanto por las convenciones y las reglas que, sin quedar anotadas sobre el papel, presidan los modos de combinación y no sean inteligibles más que gracias a la reflexión psicológica.

La lógica así entendida no constituye ya una teoría deductiva que formaría un anejo de los desarrollos científicos, sino una ciencia de observación y de comparación cuyo objeto propio consiste en la crítica de los métodos elementales del pensamiento que se reflejan en los principios fundamentales del raciocinio; y se propone *explicar* tales métodos como una realidad psicológica.

....

[12] HUSSERL, 1891, pág. 28.

[13] ENRIQUES, 1909, pág. 158 [vers. cast., págs. 164-5].

De acuerdo con nuestro punto de vista (que es rigurosamente formal), lo más urgente es rectificar la opinión de que las normas lógicas posean un valor *a priori* en lo que respecta a la verdad. Mas para tratar de esta cuestión véase la segunda parte del capítulo.

Reconozcamos, de todos modos, que la lógica puede considerarse como un conjunto de reglas que *deben* observarse *si es que se quiere* dar cohesión al pensamiento. Cosa que cabe expresar también diciendo que entre los distintos modos de pensar hay algunos que se distinguen porque en ellos se satisfacen deliberadamente ciertas condiciones de coherencia que se llaman precisamente métodos lógicos.

En este sentido, se puede considerar que la lógica forma parte de la psicología.

En resumen, Enriques no pretende otra cosa que establecer una especie de armonía entre la lógica formal, por una parte, y ciertas formas de pensar, por otra, cuyas condiciones de coherencia no pueden determinarse sino por aquélla.

En Mannoury, que ha desarrollado todo un aparato conceptual psicológico, se encuentra más bien una tendencia a revelar cierta discrepancia entre la lógica formal, por un lado, y el pensamiento real, tal y como se manifiesta en la conversación cotidiana, por otro. Tenemos un hermoso ejemplo de su método en sus explicaciones acerca de las dos formas de la negación descubiertas por él [14]:

... cuando se emplean las partículas de negación en el lenguaje vivo, los elementos emotivos se sitúan en primer lugar. Vamos a examinarlos más de cerca teniendo en cuenta la distinción entre «oposición» y «contradicción».

En una oposición (*no* grande, *no* permitido, *no* sucio [en el original, *pas* grand, *pas* permis, *pas* sale], etc.), descubrimos dos elementos significativos (unidos en el lenguaje por la partícula de conjunción) que están más o menos determinados y tienen un carácter principalmente indicativo (grande *o* pequeño, permitido *o* prohibido, sucio *o* limpio); y el valor afectivo (volitivo) de los actos de comunicación de forma negativa no se distingue, con frecuencia, sino muy poco del de los actos de comunicación correspondientes de forma positiva: pues en ambos casos el segundo término de la disyunción (pequeño, prohibido, limpio) ocupa el centro de la atención. En cambio, en la «contradicción» no formal (eso es *im*posible, eso *no* existe, eso *no* ha ocurrido [cela est *im*possible, cela *n*'existe pas, cela *ne* s'est pas passé], etcétera), o bien no hay ninguna disyunción determinada, o la idea contraria apenas nos retiene la atención. Surge de elementos emocionales fácilmente discernibles y que tienen el carácter de *estorbo* o de *rechazo*: uno se defiende frente a una concepción determinada..., vamos a designar la segunda forma de negación con el nombre de «negación excluyente», y la anterior con el de «negación electiva».

....

---

14 MANNOURY, 1947, págs. 48-53.

Nos apresuramos a recordar que el actor no tiene conciencia de estas diferencias formales, y que rara vez las aplica de una manera consecuente, pese a lo cual tienen una importancia primordial para la psicolingüística, cosa que se debe al hecho de que la negación excluyente haya dado lugar, en las lenguas civilizadas, a toda una serie de expresiones y de modos de expresión a los que podría llamarse la lengua de lo general, que está íntimamente vinculado a la negación excluyente por las fórmulas «*a* o *no-a* = todo» (principio del tercio excluso) y «*a* y *no-a* = nada» (principio de contradicción); y las demás nociones que pertenecen a esta lengua («infinito», «eterno», «nunca», «necesidad», «realidad», «muerte», «materia», «yo», «vacío», etc.) se retrotraen más o menos directamente a aquellas dos nociones.

....

... hay una parte importante de las matemáticas que no puede prestarse a semejante aplicación: la teoría matemática de los conjuntos infinitos. Todo lo concerniente a los conjuntos infinitos y a los conjuntos vacíos —dicho de otro modo, todo lo que no pueda definirse valiéndose de la *negación excluyente*— no es capaz de tener nada físico que corresponda a ello, por la sencilla razón de que la negación excluyente se distingue de la negación electiva por su valor *emotivo* (de defensa)... De ahí que el infinito tenga en las matemáticas una significación puramente formal, y en la lengua viva una significación puramente emotiva (volitiva); y, por consiguiente, el «principio del tercio [excluso]» no puede encontrar aplicación en la física. El hecho de no haber distinguido entre estas dos significaciones ha provocado grandes confusiones: la cuestión del infinito actual, por ejemplo, tantas veces planteada, es consecuencia de tal confusión.

Pese a numerosas objeciones que podrían hacérsele en lo que se refiere a los detalles, estoy convencido de que el método psicolingüístico (o «significa») de Mannoury constituye un procedimiento válido de sacar a la luz las relaciones —que han sido objeto de tantas indagaciones— entre la lógica formal y la psicología. En cuanto a sus observaciones sobre el doble carácter de la negación, ya las habían anticipado en cierta medida Bergson y Wundt, los cuales, sin embargo, no profundizaron en la cuestión de forma comparable a la suya.

3 *LA TRADICION LOGICISTA*

§ 13. Opiniones de Aristóteles: su acuerdo con la práctica de las matemáticas griegas.—En otros lugares he publicado estudios más pormenorizados sobre la teoría de las ciencias según Aristóteles, por lo que me voy a limitar a una exposición sucinta de lo que importa en el presente contexto.

Según Aristóteles, la *metodología de las ciencias demostrativas* (o *deductivas*) se caracteriza por tres postulados, que son los siguientes: 1) el *postulado de deductividad,* 2) *el de evidencia* y 3 *el de realidad.*

1) Según el postulado de deductividad, toda ciencia demostrativa, C, se basa sobre cierto número de principios, entre los cuales cabe distinguir los *conceptos primitivos* y las *verdades primitivas* (o *axiomas*). Todo concepto no primitivo perteneciente a C debe ser definido por medio de conceptos primitivos, y toda verdad no primitiva incluida en C debe ser demostrada a partir de los axiomas valiéndose de un razonamiento lógico.

2) Según el postulado de evidencia, los conceptos primitivos de C han de presentar tal grado de claridad que sea posible comprenderlos sin que necesitemos definición alguna; e igualmente, los axiomas de C han de presentar un grado tal de evidencia que nos sea posible aceptarlos como verdaderos sin necesidad de demostración.

3) Según el postulado de realidad, es preciso que los conceptos y las verdades de C se refieran a cierto campo de en-

tidades reales, que constituirá, precisamente, el objeto propio de la ciencia C.

Observemos que, en lo que se refiere a las distintas disciplinas que constituían las matemáticas griegas, estos postulados se cumplen en medida notable. En cuanto al de deductividad, también lo cumplen las teorías matemáticas contemporáneas; por lo que se comprende fácilmente que el Estagirita no haya sentido ninguna necesidad de justificarlo, y se haya limitado a citar algunos ejemplos tomados de las matemáticas de su época.

Por lo que hace al postulado de evidencia, la situación es ya más complicada. Primeramente, Aristóteles demuestra, por un procedimiento que se ha hecho clásico y que encontraremos de nuevo en Pascal (cf. el § 14), que no es posible definir todos los conceptos ni demostrar todas las verdades; luego explica, mediante su doctrina de la intuición (νοῦς), el hecho de que dispongamos de un conocimiento adecuado de los conceptos y las verdades de carácter primitivo: la intuición nos hace capaces de la *inducción* (ἐπαγωγή), que consiste en captar los principios a partir de los datos de la percepción sensible (o, más bien, a través de ellos).

El postulado de realidad, por fin, presenta dificultades verdaderamente considerables; pues en el mundo de la experiencia cotidiana no encontramos objetos tales como los descritos por los axiomas matemáticos: puntos sin dimensiones, rectas de longitud infinita, círculos perfectos, etc. Es, por lo tanto, completamente natural que Aristóteles se pregunte en virtud de qué cabe considerar los objetos que constituyen el dominio de las matemáticas como entidades reales. Adviértase que en lo que se refiere a los objetos estudiados por la lógica se plantea una pregunta análoga: allí se trata del famoso *problema de los universales*.

Rechazando las soluciones propuestas por su maestro Platón (los universales pertenecerían a una realidad trascendente, en tanto que los objetos matemáticos ocuparían una posición intermedia entre el mundo de los universales y el mundo sensible), Aristóteles presenta una solución nueva, fundada en su doctrina de *abstracción* (ἀφαίρεσις, doctrina que más tar-

de se fusionó con la de la intuición). Si bien caracterizamos los objetos matemáticos como entidades distintas de las sensibles, según el Estagirita ello no es sino un modo de hablar: en realidad, el matemático estudiaría los objetos sensibles, eso sí, *haciendo abstracción* de ciertas propiedades: la temperatura, el peso, el color, etc. (Vamos a callar por el momento sobre las objeciones que se le plantean a esta doctrina.)

Aun cuando la metodología de Aristóteles presenta un carácter positivo, suscita ciertas cuestiones cuyo debate ha dado lugar a dos doctrinas de índole netamente especulativa: la de la intuición y la de la abstracción; y cada una de ellas posee un aspecto *ontológico* y otro *epistemológico*.

No podremos evitar el examen del aspecto ontológico, pero, evidentemente, el que hemos de estudiar en primer término es el epistemológico. Ahora bien, no cabe duda de que para Aristóteles las ciencias demostrativas recurren a dos facultades muy distintas del espíritu humano: la *intuición*, que nos proporciona un conocimiento adecuado de los principios, y la *razón*, que nos permite extraer las consecuencias de ellos. La abstracción, según la concibe Aristóteles, no exige ninguna facultad específica.

Es cierto que la abstracción matemática —como, por lo demás, la abstracción eidética, que produce el conocimiento de los universales— implica ciertas operaciones («idealización, etcétera) que Aristóteles no toma en consideración; ahora bien, como todas ellas, lo mismo que la intuición, llevan al espíritu humano más allá de los datos sensibles, es natural que se hayan atribuido luego a esta última.

Comparado con estas concepciones tradicionales, el intuicionismo de Descartes y de Kant representa una tendencia a reducir los conocimientos matemáticos a una fuente única, a saber, la intuición. En Descartes, esta tendencia abarca la totalidad del campo de la actividad teorética, cosa que permite reducir la deducción a la intuición e identificar ésta con la razón.

En Kant, sin embargo, el intuicionismo no afecta sino a las matemáticas, de modo que la deducción, inútil en estas disciplinas, conserva toda su importancia en las filosóficas; y la

intuición pura, base de las matemáticas, si bien es superior a la percepción sensible, es inferior al *entendimiento* como facultad discursiva y a la *razón* como facultad de los principios.

§ 14. **Pascal.**—Tres razones hacen conveniente que mencionemos ahora a Pascal. En primer lugar, porque fue él (y no Maurólico) quien descubrió el principio de la *inducción completa.*

En segundo término, porque enunció un criterio *formal* que distingue las *definiciones nominales* de todos los demás tipos de definición; criterio que exige que la definición nos permita «reemplazar... lo definido por la definición».

Y, por fin, Pascal nos ofrece una exposición especialmente lúcida de los puntos esenciales de la metodología de las ciencias demostrativas según Aristóteles [1]:

... vuelvo otra vez a la explicación del verdadero orden, que consiste, como ya he dicho, en definir y demostrar todo.

No cabe duda de que este método sería muy hermoso, pero es absolutamente imposible: pues es evidente que los primeros términos que se quisieran definir supondrían otros que valiesen para explicarlos, y que, análogamente, las primeras proposiciones que quisieran probarse supondrían otras que las precediesen, por lo cual es patente que no se llegaría nunca a las primeras [Pascal reproduce aquí el argumento de Aristóteles que habíamos mencionado en el § 13].

... de ello no se sigue que sea preciso abandonar todo género de orden. Pues hay uno, el de la geometría [obsérvese que el mismo ejemplo de ciencia demostrativa se encuentra en Aristóteles] que, en verdad, es inferior en cuanto que es menos convincente, pero no por ser menos seguro. No define todo ni demuestra todo, y en ello le va a la zaga al otro; pero no supone sino cosas claras y constantes para la luz natural [*postulado de evidencia*], por lo cual es perfectamente verdadero [*postulado de realidad*], ya que la naturaleza lo sostiene donde falta el discurso. Este orden, el más perfecto [que hay] entre los hombres, no consiste en definir todo o en demostrar todo, ni tampoco en no definir o en no demostrar nada, sino en mantenerse en el medio de no definir las cosas claras y entendidas por todos los hombres, y en definir todas las demás, así como en no demostrar todas las cosas conocidas por los hombres y demostrar todas las demás [*postulado de deductividad*].

§ 15. **Leibniz: la demostración de los axiomas.**—Hemos encontrado en Aristóteles y Pascal la concepción tradicional de la ciencia demostrativa. Semejante ciencia presenta una *estruc-*

---

1 PASCAL, 1658.

tura dualista: por una parte, se compone de principios (conceptos y verdades de carácter primitivo), y por otra, de conceptos definibles y verdades demostrables a partir de principios. Este orden es, según Pascal, «el más perfecto que hay entre los hombres»; pese a lo cual, no lo acepta sino como mal menor.

El intuicionismo de Descartes y de Kant puede considerarse como un intento de conferir a las ciencias demostrativas una estructura unitaria: en efecto, al quedar vinculadas inmediatamente a la intuición los conceptos definibles y las verdades demostrables, y ya no por mediación de razonamientos discursivos, su posición queda asimilada a la de los principios.

El logicismo de Leibniz tiende igualmente a dar a las ciencias demostrativas una estructura unitaria, aunque para alcanzar esta finalidad aplica un método muy distinto.

En sus *Nouveaux essais sur l'entendement humain* [«Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano»] [2] examina Leibniz las tentativas de Tales, Apolonio, Proclo, Roberval y Arnauld de demostrar ciertas verdades geométricas que Euclides había propuesto como axiomas; pero del argumento de Aristóteles y de Pascal resulta que semejante tentativa no puede llegar jamás a una eliminación completa de todo supuesto axiomático. Así pues, de lo que se tratará, en general, no será sino de un esfuerzo por reducir el número de axiomas, o bien por llegar a axiomas más simples; y lo que se conseguirá, por lo tanto, será solamente una *reducción relativa* de la base axiomática.

Sin embargo, Leibniz advierte que se puede exigir una *reducción absoluta* —en el sentido de no aceptar sin demostración más que *axiomas* (*primitivos* o) *idénticos*.

Por lo demás, hace ya mucho tiempo que he dicho pública y particularmente que tendría importancia demostrar todos nuestros axiomas secundarios, de los que nos valemos ordinariamente, reduciéndolos a *axiomas primitivos*, o inmediatos e indemostrables, que son aquellos a los que últimamente y en otros lugares he llamado *idénticos*.

Se trata de lo que hoy llamamos *identidades lógicas* (o *tautologías*):

Las verdades primitivas de razón son las que yo llamo, con un nom-

[2] LEIBNIZ, 1715, libro IV, cap. VII, § 1, y cap. II, § 1.

bre general, *idénticas*, porque parece que no hacen más que repetir la misma cosa, sin enseñarnos nada.

Sin embargo, Leibniz subraya la importancia científica de las verdades de este tipo:

Habrá quien, tras haber oído con paciencia lo que hemos venido diciendo hasta aquí, acabe por perderla y diga que nos divertimos con enunciados frívolos, y que todas las verdades idénticas no sirven de nada. Mas este juicio se deberá a no haber meditado sobre estas materias: las consecuencias de la lógica (por ejemplo) se demuestran por los principios idénticos, y los geómetras necesitan el principio de contradicción en sus demostraciones que reducen al absurdo ... Lo cual hace ver que las proposiciones idénticas más puras, y que parecen más inútiles, tienen un uso considerable en lo abstracto y general; lo cual nos puede enseñar a no desdeñar ninguna verdad.

Finalmente, muestra con un ejemplo célebre que se puede demostrar una *verdad matemática* sin admitir más que *axiomas idénticos* que no impliquen ningún concepto específicamente matemático [3]:

El que dos y dos sean cuatro —supuesto que cuatro signifique tres y uno— no es una verdad absolutamente inmediata. Cabe, pues, demostrarla, y he aquí de qué modo:

Definiciones: 1) *Dos* es uno y uno.
2) *Tres* es dos y uno.
3) *Cuatro* es tres y uno.

Axioma: Al reemplazar con cosas iguales la igualdad se conserva.

Demostración: 2 y 2 es 2 y 1 y 1 (por la def. 1).
2 y 1 y 1 es 3 y 1 (por la def. 2).
3 y 1 es 4 (por la def. 3).
Luego (por el axioma)
2 y 2 es 4. Que era lo que queríamos demostrar.

Advertencia.—Démonos cuenta de que el raciocinio de Liebniz no es concluyente (observación ya hecha por Frege: cf. Frege, 1884, pág. 7); pues tenemos:

2 y 2 es 2 y [1 y 1] (por la def. 1),
[2 y 1] y 1 es 3 y 1 (por la def. 2),

de modo que Leibniz supone que

2 y [1 y 1] es [2 y 1] y 1,

[3] LEIBNIZ, 1715, libro IV, cap. VII, § 10.

cosa no justificada por los principios que había enunciado. En un razonamiento análogo (de sus *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung del Mathematik* [«Aportaciones a una presentación más fundamentada de las matemáticas»], de 1810), Bolzano enuncia explícitamente el supuesto previo de que

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

§ 16. Frege y su influencia sobre Husserl y Heymans.— Las ideas de Leibniz que acabamos de recordar constituyen el programa del logicismo tal y como lo desarrollaron posteriormente Frege y Russell; si bien es cierto que el resultado de las numerosas tentativas de Leibniz por llevar a cabo tal programa no presenta más que un interés histórico: por ejemplo, la demostración que hemos reproducido fue rechazada con toda razón por Bolzano y por Frege.

Por otra parte, Leibniz previó con una precisión notable los diferentes pasos que exigía su programa, a saber:

1) La construcción de una teoría (a la que llamaremos *lógica pura*) que comprenda el conjunto de todas las identidades lógicas; en esta construcción se observarían estrictamente los preceptos de la metodología aristotélica.
2) La definición de los conceptos específicamente matemáticos por medio de los conceptos de la lógica pura.
3) La demostración de los axiomas específicamente matemáticos a partir del conjunto de las identidades lógicas y de las definiciones de los distintos conceptos específicamente matemáticos.

La necesidad de alcanzar un nivel especialmente elevado de rigor y de lucidez lleva consigo otro paso previo más, también previsto por Leibniz, que es el siguiente:

4) La construcción de un lenguaje formalizado capaz de servir de medio de expresión para la lógica pura.

No es posible ni necesario reproducir aquí la realización del programa logicista según se desprende de los trabajos de Frege y de sus partidarios. Sin embargo, es necesario que jus-

tifiquemos la atención prestada a las ideas de Liebniz, pese a su carencia de efectos inmediatos, y que examinemos la influencia de Frege sobre Husserl y Heymans.

Si no hablásemos más que del logicismo de Frege y de sus seguidores, acaso podría tener la impresión el lector de que esta tendencia se deriva solamente de una problemática accidental vinculada a un aspecto especial de la investigación contemporánea y de que no representa, pues, sino una fase pasajera en el desarrollo del pensamiento matemático. Ahora bien, el solo hecho de que la totalidad del programa del logicismo se encuentre ya en Leibniz muestra de forma concluyente que éste representa, por lo menos, cierto aspecto esencial del pensamiento matemático como tal. Por lo demás, hay algunos elementos del logicismo que se remontan a la antigüedad: si Aristóteles subraya la necesidad de desarrollar la aritmética y la geometría como disciplinas distintas, y si presenta la silogística como una tercera disciplina autónoma, es que Platón, por el contrario, había hecho un intento de apoyar la dialéctica y las matemáticas sobre una base común; y, por otra parte, en Aristóteles mismo quedan huellas de una tendencia análoga en sus observaciones sobre una *matemática universal.*

Para poder juzgar adecuadamente la influencia de Frege sobre Husserl y sobre Heymans es preciso darse cuenta del curioso carácter del psicologismo de este último y del antipsicologismo de aquél. En sus *Logische Untersuchungen* declara Husserl que ha abandonado el psicologismo de la *Philosophie der Arithmetik*; y, a su vez, combate el psicologismo de Heymans. Mas conviene observar que la diferencia entre la *Philosophie der Arithmetik* y las *Logische Untersuchungen* es principalmente terminológica: el término «psicología» queda reemplazado por el de «fenomenología», que, sin embargo, denota *grosso modo* el mismo tipo de investigación introspectiva.

Heymans, por otra parte, no es un «psicologista» en el sentido de que quisiera fundar los principios de la lógica sobre datos empíricos relativos a las operaciones mentales: acepta el carácter apodíctico de tales principios, cosa que le permite desarrollar una concepción acerca de los fundamentos de la aritmética que se encuentra bastante próxima al logicismo de

Frege. Solamente en la explicación de la evidencia de tales principios, en tanto de fenómeno psíquico, recurre a datos de orden empírico.

§ 17. **Russell y la crisis de los fundamentos.**—El desarrollo del logicismo se vio interrumpido bruscamente cuando Russell —quien, incluso antes de conocer los trabajos de Frege, había adoptado el programa logicista— descubrió la paradoja que ha recibido su nombre: esta paradoja hace ver que el sistema de la lógica pura según Frege es contradictorio.

Sin dar detalles históricos, voy a describir la situación tal y como se presenta al lógico de nuestros días. Cabe distinguir en la lógica pura freguiana dos niveles distintos: tenemos un nivel inferior (la *lógica elemental* o *teoría de la cuantificación*), que representa la teoría de los operadores proposicionales, esto es, de: — [*no*], V [*o*], & [*y*], → [*si* ..., ...], y de los cuantificadores "(*x*)" (*para todo x*) y "(*Ex*)" (*para algún x*) *—, así como un nivel superior, que representa cierta versión de la teoría de *clases* o de *conjuntos*.

En este último nivel, la teoría de Frege se funda, en lo esencial, sobre el *axioma de comprehensión*, que cabe enunciar de la forma siguiente:

1) los objetos que posean en común cierta propiedad constituyen una *clase* cuyos *elementos* son, clase que está determinada de manera unívoca por dicha propiedad característica;
2) una clase es un objeto, y, por consiguiente, puede, a su vez, aparecer como elemento de otra clase, y
3) dos clases que contengan los mismos elementos serán idénticas.

* El autor da un elenco usual de símbolos; pero no son los únicos, ni siquiera los más difundidos; así, otro sistema que cada vez logra más aceptación es el siguiente, empleado en casi todas las obras alemanas: '→' (no...), '∨' (... o ...), '∧' (... y ...), '→' (si ..., ...), '∀*x*' (para todo *x*, ...) y '∃*x*' (para algún *x*, ...). Acaso no sea ocioso recordar que el símbolo que se traduce con 'o' representa el «o» incluyente (esto es, '*A* ∨ *B*' querrá decir «*A*, o *B*, o ambos»), y que con '→' se forjan los «condicionales» o «implicaciones materiales», de cuyas peculiares condiciones veritativas decimos algo en nuestra primera nota a pie de página del § 20. (*N. del T.*)

Es fácil explicar el alcance de este axioma valiéndose de ciertos ejemplos ilustrativos extraídos de las disciplinas científicas más variadas: toda clasificación biológica constituye una aplicación suya; y asimismo, todo lugar geométrico es una clase de puntos; ahora bien, aunque concebimos una recta como la clase de todos sus puntos, puede presentarse como elemento de la clase de todas las tangentes a una circunferencia dada, etcétera.

En todas estas aplicaciones «normales» del axioma de comprehensión se presupone un campo dado de elementos determinados: los seres vivos, los puntos del espacio, los números naturales, etc. Y luego se introducen las clases de tales elementos, las clases de estas clases, y así sucesivamente.

Sin embargo, se pueden construir clases sin presuponer la existencia de un acervo inicial de elementos primitivos: por ejemplo, cabe siempre introducir la clase de todos los objetos que no pertenezcan a clase alguna, y denotar con $\emptyset$ esta clase, que no contendrá ningún elemento; luego se puede introducir la clase de todos los objetos idénticos a $\emptyset$, clase que no contendrá otro elemento que $\emptyset$, y a la que denotaremos con $\{\emptyset\}$; a continuación es posible introducir la clase de los objetos idénticos, o bien a $\emptyset$, o a $\{\emptyset\}$, clase que denotaremos mediante $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}$; etc.

Frege pudo construir la aritmética a base de la lógica elemental y del axioma de comprehensión aprovechando, en lo esencial, esta posibilidad.

Ahora bien, esta base es contradictoria. En efecto, se puede introducir la clase de todas las clases que no aparezcan entre sus propios elementos, a la cual designaremos con R; y plantemos la cuestión de saber si R aparecerá o no entre sus propios elementos.

1) Supongamos que sí; entonces, R no poseerá la propiedad característica de sus elementos, de modo que R no constituirá un elemento de sí misma.

2) Sin embargo, si R no es un elemento de R, no aparecerá entre sus propios elementos; luego poseerá la propiedad característica de sus elementos, por lo cual R habrá de ser un elemento de R. Volvemos a encontrarnos, pues, de nuevo en la suposición 1), que, sin embargo, había quedado ya refutada.

De la aparición de esta paradoja resulta que no se puede aceptar la construcción de Frege en su forma original. Admitido lo cual, o bien cabrá rechazar enteramente el programa logicista, o intentar realizarlo de otra manera.

Russell no quería, en modo alguno, abandonar el logicismo; por lo que se vio obligado a buscar los medios de escapar a la paradoja. Es evidente que se imponía una revisión de la lógica pura según Frege; ahora bien, todo parece indicar que lo que es responsable de la paradoja de Russell no es la lógica elemental, sino el axioma de comprehensión. Por consiguiente, será menester que la aplicación de este axioma se someta a unas restricciones tales que impidan la formación de la clase R, y, al mismo tiempo, será preciso que el axioma conserve suficiente fuerza para garantizar la existencia de las clases de que tendremos necesidad para reconstituir los resultados de Frege.

La *teoría de los tipos lógicas*, propuesta por Russell a partir de 1903, y desarrollada más tarde tanto por su autor como por otros lógicos, constituye una primera solución de este problema; podemos comprobar, así pues, que el logicismo ha sobrevivido a la crisis de los fundamentos.

§ 18. **Los conjuntistas: Cantor y Zermelo.**—Por más que en su origen la teoría cantoriana de conjuntos surgiera de unas concepciones muy diferentes de las de Frege, su desarrollo suscitó dificultades análogas: ya en 1895 descubrió Cantor una paradoja, que Burali-Forti encontró independientemente luego y publicó en 1897; y un poco más tarde, Zermelo descubrió una variante de la paradoja de Russell.

Este desarrollo paralelo del logicismo y del cantorismo no es, en absoluto, pura coincidencia. Pues la teoría «ingenua» de Cantor hace también intervenir un *axioma de comprehensión*, cuyo enunciado es el siguiente:

1) Las entidades matemáticas con una propiedad en común constituyen un *conjunto*, del cual son los *elementos* y que está determinado de forma unívoca por tal propiedad característica;
2) un conjunto es una entidad matemática, y por consiguiente puede, a su vez, aparecer en tanto que elemento de un conjunto, y

3) dos conjuntos que contengan los mismos elementos serán idénticos.

Además, los razonamientos que se utilizan en la teoría de conjuntos siguen los principios de la lógica elemental. De ahí que, en lo esencial, el descubrimiento de las paradojas ocasione en el cantorismo y el logicismo problemáticas enteramente análogas.

Russell, que se había esforzado inicialmente por incorporar al logicismo las aportaciones de la teoría de conjuntos, observó muy pronto esta analogía, pero los conjuntistas al principio no la reconocieron: así, la axiomatización de Zermelo de la teoría de conjuntos (1908) es muy distinta de la teoría de los tipos russelliana; pero poco a poco se llegó a producir cierta asimilación entre ambas direcciones. Tanto para una como para la otra se trataba, en suma, de formular una nueva versión del axioma de comprehensión que estuviera a cubierto de las paradojas y que al mismo tiempo permitiese reconstituir lo esencial de las ideas de Cantor y de Frege. El axioma habría de tener *grosso modo* la forma siguiente:

1) los objetos dotados en común de cierta propiedad constituyen una *clase* de la cual son los *elementos,* la cual está determinada de modo unívoco por tal propiedad característica;
2) una clase que cumpla ciertas condiciones, *C,* será *comprimible* en un *conjunto*; éstos son objetos, y pueden por consiguiente, aparecer a su vez como elementos de una clase, y
3) dos clases que contengan los mismos elementos serán idénticas.

Es preciso admitir, por consiguiente, junto a las *clases comprimibles* o *conjuntos,* las *clases en sentido propio* (*o no conjuntos*), que no existirán sino como *puras multitudes.* Es decir, que el descubrimiento de las paradojas nos obliga a reemplazar el platonismo radical de Cantor y de Frege por un platonismo mitigado, o incluso por un conceptualismo o un nominalismo.

La teoría russelliana de los tipos lógicos y la axiomatización de Zermelo se caracterizan, tanto la una como la otra, por cierta elección de las condiciones *C*; y puede decirse que constituyen, respectivamente, el punto de partida de la tradición logicista y el de la cantorista. Sin embargo, debido a una asimilación progresiva, apenas es ya posible una distinción tajante entre las dos tradiciones: actualmente existe toda una gama de construcciones intermedias. Pese a lo cual, podemos citar, como representantes actuales del logicismo, las obras *Mathematical Logic,* de W. V. O. Quine (ed. revisada, 1951) y *Logic for mathematicians,* de J. Barkley Rosser (1953), y, como representantes del cantorismo, los *Eléments de mathématiques,* de N. Bourbaki (a partir de 1939) y la *Axiomatic Set Theory,* de P. Bernays (1959); cada uno de estos tratados presenta, en forma más o menos detallada, una construcción del conjunto de la matemática pura que, según todo parece indicar, se encuentra a cubierto de paradojas, y que parte o de la lógica pura o de la teoría de conjuntos.

Estos resultados, por muy satisfactorios que sean desde el punto de vista «técnico» del matemático, no constituyen, con todo, una solución definitiva del problema inicial. Recordemos, en efecto, que el objetivo primordial —si bien menos consciente en Cantor que en Frege— era el de construir la matemática pura conforme a los preceptos de la metodología aristotélica; y la base admitida tanto por Cantor como por Frege (los principios de la lógica elemental y la versión original del axioma de comprehensión) ofrece un grado sumamente elevado de evidencia racional.

Al resultar ilusoria semejante evidencia, nos hemos visto obligados a someter a ciertas restricciones la aplicación del axioma de comprehensión; ahora bien, no se puede decir que las diversas versiones nuevas de tal axioma presenten un grado de evidencia comparable al de la versión original: se trata siempre de reelaboraciones más o menos dificultosas, inspiradas en un análisis refinado de las distintas paradojas; y se necesita siempre llevar a cabo un análisis a fondo para convencerse de que están bien fundadas.

§ 19. Otras reacciones: el intuicionismo de Brouwer, el psicologismo de Mannoury y de Enriques, y el formalismo radical de Hilbert.—Es completamente natural que, dadas la influencia de la metodología de Aristóteles y la falta de éxito del cantorismo en sus esfuerzos por conformarse a sus preceptos, se hayan realizado tentativas de llegar por un camino distinto a una construcción de la matemática pura que fuese compatible con los requisitos exigidos por tal metodología.

El intuicionismo, que se inspira en las concepciones ya examinadas de Descartes y de Kant, se presenta actualmente en dos formas netamente distintas: el semi-intuicionismo de la escuela de París y el intuicionismo radical de la escuela de Brouwer.

El *semi-intuicionismo*, pese a haber sido preconizado por un grupo bastante numeroso de matemáticos, todos los cuales han hecho aportaciones de la mayor importancia (R. Baire, E. Borel, J. Hadamard, H. Lebesgue y H. Poincaré), no ha intentado nunca asentar una construcción unificada de las matemáticas puras que se fundase en unos principios bien determinados: sus representantes se han limitado siempre a una crítica más o menos ocasional de ciertas manifestaciones de las tendencias logicista, cantorista o formalista.

El *intuicionismo radical* de Brouwer, por el contrario, parte de un análisis a fondo del conjunto de las matemáticas clásicas. Y este análisis da lugar a una observación verdaderamente sorprendente: ya a un nivel muy elemental, en estas matemáticas intervienen ciertos procesos cuya admisión no es compatible, en modo alguno, con una actitud constructivista.

En efecto, como hemos visto en el capítulo 1, § 3, la demostración matemática consiste para Kant en una cadena de inferencias íntimamente trabada —por así decirlo— con una sucesión de construcciones; y éstas se efectuarían *a priori*, por la imaginación pura en la intuición pura. Ahora bien, en las matemáticas clásicas sucede con frecuencia que en el curso de una demostración aparece una construcción que exige una sucesión infinita de operaciones sucesivas, y que tal demostración contiene determinada inferencia que depende del resultado de

aquella construcción; pero de tal resultado no podrá saberse nada mientras no se llegue al final de dicha sucesión infinita.

En situaciones de esta índole suele apelarse al principio del tercio excluso de la manera siguiente: supongamos que se llegara al final de la sucesión, y que, por lo tanto, pudiéramos saber su resultado; éste sería, o *R* o no-*R;* en el caso de ser *R,* completaríamos la demostración del modo *A,* y si fuese no-*R,* lo haríamos del modo *B*; de manera que, si en ambos casos se llega a la conclusión *T,* ésta queda asentada en todo caso.

Desde un punto de vista estrictamente constructivista, semejante forma de razonar no es admisible. Pues este punto de vista no tolera que se haga intervenir el resultado de una construcción si ésta no puede llevarse a cabo, y es evidente que jamás podrá llevarse a cabo una construcción que consista en una sucesión infinita de operaciones encadenadas.

Brouwer y sus discípulos han hecho ver que en las matemáticas clásicas se encuentran muchas más demostraciones no constructivas de lo que podría suponerse. Hay algunos casos en los que es posible adaptar las demostraciones a lo que exige el intuicionismo radical; pero sucede con frecuencia que es imposible llegar a una demostración constructiva, por lo cual la adopción de un punto de vista estrictamente intuicionista implica el sacrificio de gran número de teoremas clásicos, especialmente en las matemáticas superiores.

No cabe duda de que la crítica intuicionista de las matemáticas clásicas se derrumba si se abandona la óptica constructivista; pero semejante abandono da lugar a un nuevo obstáculo en nuestros esfuerzos por conformarnos a los preceptos de la metodología de Aristóteles. El logicismo y el cantorismo no pueden presumir de una evidencia racional completa; el abandono del punto de vista del constructivismo nos privaría asimismo del recurso a la evidencia intuitiva, y apenas queda tipo alguno de evidencia que pueda servir de fundamento a las matemáticas puras.

En esta situación, la resurrección del *psicologismo* por F. Enriques y G. Mannoury es sumamente oportuna. Observemos que en estos pensadores, que habían desarrollado sus ideas

independientemente uno de otro, no encontramos una reanudación de los intentos de J. Stuart Mill, B. Erdmann y otros autores por fundar las matemáticas puras en principios tomados de la psicología: justamente sucede al revés, o sea, que tanto Enriques como Mannoury se proponen mostrar que toda tentativa de fundar la matemática pura sobre una evidencia absoluta sería vana, y sacar a luz el mecanismo psíquico que da origen a tales tentativas. Mannoury expresa esta intención con una claridad perfecta [4]:

> Pero todo eso con que se sigue disfrazando a las matemáticas, su carácter absoluto y su exactitud perfecta, su generalidad y su autonomía, en una palabra, su verdad y su eternidad, todo ello (perdóneseme la expresión), *todo ello no es más que pura superstición.*

No es necesario, con todo, que ahondemos ahora en las ideas de Mannoury y de Enriques; pues para explicar la búsqueda de una evidencia absoluta como base de las matemáticas no es necesario recurrir a un análisis psicológico, dado que tal explicación puede fundarse en los hechos históricos que hemos venido examinando. La búsqueda siempre renovada de una evidencia absoluta se deriva de la influencia —o de la aceptación implícita, en ocasiones— de la metodología aristotélica; el prestigio de esta metodología se debe parcialmente, sin duda alguna, a cierta atracción emotiva, pero también entran en juego su inherente racionalismo, la forma en que la expusieron y defendieron Aristóteles y sus adeptos y, sobre todo, los inapreciables servicios que ha prestado al guiar el desarrollo de las ciencias deductivas cuando adquirían el primer impulso. Si, por otra parte, las ciencias contemporáneas no pueden seguir plegándose a sus preceptos, no es razonable llamarla «pura superstición».

Tanto aquí como por doquier, la verdadera sabiduría consiste en mantenerse en el justo medio. Si bien la evidencia es una virtud sobremanera escasa en los principios de las teorías deductivas, ello no justifica, en modo alguno, que se proclame como virtud la falta de evidencia; y, por otra parte, Bernays ha hecho observar que esta falta no es necesariamente

[4] MANNOURY, 1947.

un vicio irremediable. (En el capítulo 6, § 40, hablaremos de la posibilidad de una *evidencia adquirida*.)

Sin embargo, desde el momento en que se admita la introducción de principios no evidentes se plantea de nuevo un grave problema de orden metodológico: ya hemos visto que ha bastado la introducción de un principio evidente, o considerado como tal, para correr el riesgo de que surja una paradoja; pues mucho más correremos este riesgo si introducimos principios no evidentes.

En consecuencia, si se abandona la búsqueda de una evidencia absoluta que pudiera servir de base última a la matemática pura, se compromete uno a la vez, por así decirlo, a buscar por lo menos un método que permita garantizar la falta de contradicción de las teorías deductivas fundadas sobre principios no evidentes.

Nos encontramos así con un problema que estaba ya planteado antes de que se descubrieran las paradojas de la lógica y de la teoría de conjuntos, debido a la construcción de geometrías no euclídeas y de geometrías de *n* dimensiones. Recordemos en pocas palabras el método que permite demostrar la no contradicción de la *geometría de cuatro dimensiones*. Vamos a suponer que se hayan elegido como *conceptos primitivos* los de *punto, recta, plano, hiperplano* y *distancia;* y vamos a omitir el enunciado de los axiomas.

Partiendo de ello, se introducen las definiciones siguientes:

Definición 1. Un *punto* es una cuaterna ordenada, $P = \langle x, y, z, w \rangle$, de números reales cualesquiera, x, y, z y w.

Definición 2. La *distancia* entre los puntos $P = \langle x, y, z, w \rangle$ y $P' = \langle x', y', z' w' \rangle$ es

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + (w-w')^2}.$$

Definición 3. Una *recta* es un conjunto de puntos que contiene dos, P y P', entre los que media una distancia positiva y

que, además, no contiene sino puntos $P''=\langle x'', y'', z'', w''\rangle$ tales que

$$\begin{aligned} x'' &= s \,.\, x + (1-s).x', \\ y'' &= s \,.\, y + (1-s).y', \\ z'' &= s \,.\, z + (1-s).z', \\ w'' &= s \,.\, w + (1-s).w', \end{aligned}$$

siendo s un número real cualquiera.

Definición 4. Un *plano* es un conjunto de puntos que contiene tres, P, P' y P'', no pertenecientes a la misma recta y que, además, no contiene sino puntos $P'''=\langle x''', y''', z''', w'''\rangle$ tales que

$$\begin{aligned} x''' &= s \,.\, x + t \,.\, x' + (1-s-t).x'', \\ y''' &= s \,.\, y + t \,.\, y' + (1-s-t).y'', \\ z''' &= s \,.\, z + t \,.\, z' + (1-s-t).z'', \\ w''' &= s \,.\, w + t \,.\, w' + (1-s-t).w'', \end{aligned}$$

siendo s y t números reales cualesquiera.

Definición 5. Un *hiperplano* es un conjunto de puntos que contiene cuatro, P, P', P'' y P''', no pertenecientes al mismo plano y que, además, no contiene sino puntos $P''''=\langle x'''', y'''',$ $z'''', w''''\rangle$ tales que

$$\begin{aligned} x''' &= s \,.\, x + t \,.\, x' + u \,.\, x'' + (1-s-t-u).x''', \\ y'''' &= s \,.\, y + t \,.\, y' + u \,.\, y'' + (1-s-t-u).y''', \\ z'''' &= s \,.\, z + t \,.\, z' + u \,.\, z'' + (1-s-t-u).z''', \\ w'''' &= s \,.\, w + t \,.\, w' + u \,.\, w'' + (1-s-t-u).w''', \end{aligned}$$

siendo s, t, y u números reales cualesquiera.

Sea ahora X una aserción cualquiera formulada valiéndose de la terminología de la geometría de 4 dimensiones; las definiciones 1 a 5 nos permiten reemplazar cada concepto primitivo que aparezca en X por el *definiens* correspondiente, y de este modo X queda transformada en una aserción, X^*, a la que llamaremos la *reducida* de X. La reducida X^* se formula, pues, mediante la terminología de la teoría de los números

reales; la reducida de la aserción negativa (*no*-X)*, será la negación, *no*-(X^*), de la reducida de X, o sea, de X^*; la reducida de una aserción hipotética, (*si* X, Y), que es (*si* X, Y)*, será igualmente una aserción hipotética, (*si* X^*, Y^*), formada a partir de las reducidas de las componentes X e Y, o sea, X^* e Y^*, y de (*si* X, Y); etc.

Ahora es preciso hacer las dos observaciones siguientes:

A) *Si X es una axioma de la geometría de 4 dimensiones, X^* será un teorema de la teoría de los números reales.*

Como hemos omitido el enunciado de los axiomas en cuestión, es evidente que no podemos justificar esta observación.

B) *Supongamos que la serie de aserciones X_1, X_2, ..., X_k, Y constituya un raciocinio concluyente; entonces, la serie de las reducidas, X_1^*, X_2^*, ..., X_k^*, Y^*, constituirá asimismo un raciocinio concluyente.*

En efecto: supongamos (para fijar las ideas) que X_k sea (*si* X_2, Y), con lo cual llegaremos a Y a partir de X_2 y de X_k mediante una aplicación del *modus ponens*†; entonces, X_k^*, esto es, (*si* X_2, Y)*, será (*si* X_2^*, Y^*), por lo cual, Y^* se obtendrá a partir de X_2^* y de X_k^* aplicando el *modus ponens*. Así pues, a cada paso deductivo de la primera serie corresponde el mismo paso en la serie de las reducidas.

De estas dos observaciones resulta que

C) *Si Y es un teorema de la geometría de 4 dimensiones, Y^* será un teorema de la teoría de los números reales.*

Pues si Y es un teorema de dicha geometría, existe una serie de aserciones, X_1, X_2, ..., X_k, Y, tal que 1) constituye un raciocinio concluyente y que 2) a partir de los axiomas de la geometría de 4 dimensiones lleva a la conclusión Y; por consiguiente, la serie formada por las correspondientes reducidas, X_1^*, X_2^*, ..., Y^*, 1) en virtud de B), constituye un raciocinio

† Como es sabido, suele darse tradicionalmente el nombre de *modus* (*ponendo*) *ponens* a la regla deductiva —ordinariamente llamada, en los textos actuales de lógica simbólica, «regla de separación»— que permite deducir el enunciado «*B*» cuando se tienen los enunciados «*A*» y «(si *A*, *B*)». (*N. del T.*)

concluyente y, 2) en virtud de A), lleva, a partir de ciertos teoremas de la teoría de los números reales, a la conclusión Y^*; de modo que Y^* es asimismo un teorema de esta última teoría.

D) *Si la geometría de 4 dimensiones contiene dos teoremas contradictorios,* Y *y* (no-Y), *la teoría de los números reales contendrá también dos teoremas contradictorios,* Y^* *y no-*(Y^*).

En efecto, si *Y* y (*no-Y*) son teoremas de tal geometría, Y^* y (*no-Y*)* serán teoremas de la teoría de los números reales, y (*no-Y*)* es la misma aserción que *no-*(Y^*).

E) *Si la teoría de los números reales es no contradictoria, la geometría de 4 dimensiones es, asimismo, no contradictoria.*

El método que acabamos de explicar valiéndonos de un ejemplo concreto suele recibir el nombre de *método de interpretación,* y consiste en *reducir* los teoremas, *X*, de una teoría, *T*, a teoremas, X^*, de otra teoría, T^o, mediante una definición de los conceptos primitivos de *T* a base de la terminología de T^o. Si es posible semejante «interpretación» de los conceptos primitivos de *T*, la no contradición de T^o implica la no contradicción de *T*; por consiguiente, supuesto que se haya demostrado de antemano la no contradicción de T^o, o bien, simplemente, que se la dé por hecha, resulta que *T* será no contradictoria.

En el caso de nuestro ejemplo (y también en otros muchos casos análogos), T^o es la teoría de los números reales. Ahora bien, se sabe que esta teoría puede reducirse, a su vez, a otra teoría, T^{oo}, que es la teoría de los números naturales; y, merced a los esfuerzos de los logicistas y de los conjuntistas, la teoría T^{oo} se ha reducido a la teoría T^{ooo}, que es, unas veces un sistema de lógica pura a lo Frege, y otras una teoría de conjuntos a lo Cantor. Es frecuente que a esta teoría T^{ooo}, que proporciona una base para el conjunto de todas las teorías matemáticas, se le llame *gran lógica.* Así pues, podría demostrarse en general la no contradicción de una teoría matemática específica si se pudiera, o bien asegurar, o bien presumir, la no contradicción de una gran lógica. Sin embargo, la aplicación de este método choca con obstáculos invencibles.

1) No podemos presumir la no contradicción de una gran lógica, dado que las primeras versiones de ella han resultado ser contradictorias y que las nuevas versiones se han obtenido mediante revisiones no apoyadas en una fuerte evidencia racional.

2) No es posible demostrar por el método de interpretación la no contradicción de una gran lógica, T^{ooo}, dado que semejante teoría no contiene conceptos primitivos propiamente dichos.

3) Tampoco cabe aplicar una variante de este método que permita la reducción de T^{ooo} a una teoría matemática especial T^*, dado que esta última habrá de presuponer, en general, todo el aparato de la lógica pura o de la teoría de conjuntos, que justamente está codificado en T^{ooo}.

4) Podría también estudiarse la posibilidad de reemplazar la teoría T^{ooo} por otra aún más fundamental, T^*. Sin embargo, por el momento no se dispone de ninguna teoría de este género.

Hilbert, al proclamar la concepción de la *metamatemática,* quiso escapar a este círculo vicioso, que amenazaba toda tentativa de fiarse exclusivamente de la evidencia racional; y como Brouwer, aunque en sentido distinto, recomienda la vuelta a la evidencia intuitiva.

La aplicación del método metamatemático presupone que la teoría matemática cuya no contradicción se trate de demostrar, T, se haya sometido a una formalización completa, y que se haga abstracción del significado de los símbolos que aparezcan en el aparato terminológico de la teoría T una vez formalizada. Entonces, la demostración de cualquier teorema de T, por ejemplo X, se reduce a una especie de *cálculo* (noción en la que hemos de profundizar un poco más adelante); y éste constituirá luego el objeto estudiado por cierta teoría que, partiendo del enunciado de las reglas de aquél, examine cuáles son los resultados posibles. Entre los eventuales resultados que pueden considerarse hay uno que ahora nos interesa muy particularmente, a saber, la posibilidad de demostrar dos teoremas contradictorios, X e Y: desde el punto de vista formal implicado por la metamatemática hilbertiana, en este caso se trata de la posibilidad de producir dos fórmulas X e Y que tengan

una estructura «tipográfica» especificada (y ello únicamente aplicando las reglas del cálculo).

La sistematización de los estudios que acabamos de caracterizar dará lugar a cierta teoría deductiva, *MT*, en la que intervendrá un aparato lógico determinado; ahora bien, éste tiene que ser lo más sobrio posible y, muy en especial, ha de proscribir todo paso deductivo que no se encuentre justificado por una evidencia intuitiva. (El éxito —al menos parcial— del intuicionismo brouweriano nos otorga la posibilidad de adaptar el razonamiento deductivo a la evidencia intuitiva.)

Antes de terminar este parágrafo quiero examinar brevemente el fenómeno de la *falsa evidencia*. Conocemos muchos errores geométricos sugeridos por falsas evidencias intuitivas; y el espectacular fracaso de las primeras versiones de la lógica pura y de la teoría de conjuntos constituye un ejemplo sorprendente e instructivo de una falsa evidencia racional. Podría suponerse que un análisis psicológico del mecanismo subyacente a la aparición de tales falsas evidencias sería capaz de guiarnos en la búsqueda y utilización de nuevas evidencias; pero, en mi opinión, un análisis de este tipo, que sin duda daría lugar a resultados sumamente interesantes, apenas valdría para acercarnos a la finalidad propuesta. En efecto:

1) Las indicaciones que podría proporcionarnos serían puramente negativas, en tanto que de lo que tenemos necesidad es de orientaciones de carácter positivo, que nos pudieran sugerir, por ejemplo, un sustituto del axioma de comprehensión.

2) Bastan el sentido común y una experiencia enormemente global para enseñarnos que la evidencia apenas es digna de confianza más allá de lo concreto y lo particular. Observación que se refiere tanto a la evidencia racional como a la intuitiva o sensible: por ejemplo, la evidencia racional nos recomienda introducir la clase de todos los números pares, y asimismo, una vez que se ha descubierto la paradoja russelliana, no introducir la clase *R* de Russell; de suerte que, en la medida en que sus recomendaciones tengan un alcance general, no es prudente otorgarle una confianza sin límites.

§ 20. La crisis gödeliana.—Citemos dos ejemplos típicos entre los resultados que cabe asentar dentro de la aritmética clásica:

I) 7+5=12:

II) *todo número natural, n, admite una factorización única, salvo en lo que se refiere al orden relativo de los factores primos.*

Uno y otro se asientan por medio de razonamientos estrictos, partiendo de los mismos axiomas aritméticos y aplicando los mismos principios lógicos. Sin embargo, al primer razonamiento se le suele llamar un *cálculo,* mientras que ordinariamente se dice que el segundo razonamiento es una *demostración* propiamente dicha.

La única diferencia entre los dos casos reside en que el primero se refiere exclusivamente a unos números naturales determinados (salvo en los pasos iniciales, que, sin embargo, en una exposición no formalizada se encuentran más o menos disimulados), mientras que el segundo hace en gran medida referencia a números «cualesquiera», representados por variables o por indeterminadas, y en él entran en juego generalizaciones.

Puede hacerse una distinción análoga acerca de los resultados de la metamatemática, *MT,* correspondiente a una teoría formalizada *T;* y así se obtienen dos tipos distintos, de los que podemos presentar dos ejemplos típicos:

I) *la fórmula F es un teorema de T;*

II) *todo teorema, X, de T tiene la propiedad P;*

en los que «*F*» es el nombre de una fórmula perfectamente determinada de *T,* «*X*» representa una fórmula «cualquiera» y «*P*» enuncia, por ejemplo, la existencia de una sucesión de fórmulas análoga a la sucesión de aserciones descrita en el § 19, apartado B).

Gödel ha observado que esta analogía entre la aritmética y la metamatemática es mucho más profunda de lo que podría pensarse a primera vista. Y para sacar a luz tal semejanza

conviene que a cada fórmula, X, de T se le asocie cierto número natural, $g(X)$, al que se llama su *número de Gödel;* supondremos también que para dos fórmulas distintas, X e Y, se tendrá siempre $g(X) \neq g(Y)$.

Entonces, a toda propiedad metamatemática, P, de ciertas fórmulas, X, de T, corresponderá cierta propiedad aritmética, P^*, de sus números de Gödel; y a cada relación, R, entre dos fórmulas, X e Y, de T corresponderá asimismo cierta relación, R^*, entre sus respectivos números de Gödel. En una palabra: llegamos a una reducción de la metamatemática *MT* a la aritmética que es enteramente comparable a la reducción de la geometría de 4 dimensiones a la teoría de los números reales, según la hemos visto en el § 19. En particular, todo razonamiento metamatemático que valga para asentar un resultado del tipo I) —y que, por consiguiente, se refiera exclusivamente a fórmulas determinadas— se reducirá a un cálculo numérico relativo a los números de Gödel de tales fórmulas; y en general, como Hilbert no admite en la metamatemática más que raciocinios que posean una gran evidencia intuitiva, sus correlatos aritméticos poseerán igualmente un carácter sumamente elemental.

Partiendo de aquí, vamos a imponer ciertas restricciones a la elección de la teoría formalizada, T, que ha de constituir el objeto de la metamatemática *MT:* en primer lugar, supondremos que, de hecho, T no sea contradictoria; luego vamos a suponer que T incorpore al menos el elemental sector de la aritmética que incluye los correlatos de los raciocinios admitidos en la metamatemática intuitiva (por ejemplo, T ha de poseer cierta notación, n^o, para cada número natural n; y también ha de proporcionar una base suficiente para efectuar cualesquiera cálculos numéricos); finalmente, si la reducida, K^*, de una aserción metamatemática, K, es demostrable en T, K tiene que ser verdadera. (Subrayemos, antes de continuar, que de un enunciado metamatemático, K, se llega a su reducido a través de *dos pasos:* primeramente, la introducción de los números de Gödel hace corresponder a K cierto enunciado aritmético, K', de manera que, mientras que K se refiere a fórmulas de T, a propiedades metamatemáticas de estas fórmulas, a relaciones metamatemáticas entre ellas, etc., K' se referirá a los

números de Gödel de tales fórmulas, a propiedades aritméticas de estos números, a relaciones aritméticas entre ellos, etc.; y luego, supuesto que T contenga un sector conveniente de la aritmética, habrá en T cierta fórmula, K^*, que constituirá la traducción [formalizada] de K'.)

Consideremos ahora el enunciado metamatemático (supuesto verdadero) que exprese la no contradicción de T; a semejante enunciado corresponderá, del modo que acabamos de explicar, cierta fórmula de T, tal como NC.

El aparato terminológico de T tiene que poder admitir las fórmulas $K(x)$ que permitan formular condiciones impuestas a un número natural no determinado, x. Vamos a considerar ahora los números naturales, n, que cumplan cierta condición Q_T, que será la siguiente:

n ha de ser el número de Gödel de una fórmula, K(x), tal que

1) *K(x) sea una fórmula del tipo que acabamos de describir, y*

2) *si T es no contradictoria y si $K(n^o)$ es demostrable en T, también $\overline{K(n^o)}$ ha de ser demostrable en T.* ††

---

†† Adviértase que esta segunda cláusula es lo que en lógica formal se suele llamar «condicional» o «implicación material» (nombre, este último, que debería desaparecer en beneficio de una pulcra distinción entre la sintaxis y la semántica lógicas); esto es, un enunciado de la forma 'si *A*, *B*' (simbólicamente, '$A \rightarrow B$'), aun cuando en ella la prótasis, «*A*», es descomponible en otras dos condiciones o suposiciones, de suerte que se la puede escribir '*C* y *D*' ('*C* & *D*', o bien '$C \wedge D$'); así pues, podría formularse tal clásula del siguiente modo 'si *C* y además *D*, *B*' ('$(C \& D) \rightarrow B$'). Debe advertirse también que, de acuerdo con la definición de «condicional», éste sólo es falso cuando, siendo verdadera la condición, suposición o prótasis («*C* & *D*» en nuestro caso, o sea, cuando tanto «*C*» como «*D*» sean enunciados verdaderos), lo condicionado o apódosis (aquí «*B*») sea falso; y que en todos los demás casos será verdadero: cf. el § 23, apartado 11), regla (S 2). Esto equivale a decir que, en los casos en que la suposición o condición no se cumpla (lo cual, si se tratase del lenguaje ordinario, y no de uno especial, para fines lógicos, como es el que se emplea en esta demostración, nos llevaría a una renuncia a saber nada acerca de la verdad o falsedad del enunciado condicional completo, por fallar lo que en él se anteponía como condición o suposición), se estipula que el «condicional» es verdadero (de modo vacío o vacuo, como suele decirse). (*N. del T.*)

Ante todo, podemos reemplazar Q_T por una condición equivalente, Q', enunciada en una terminología puramente aritmética; y luego podemos construir una fórmula de T, $Q(x)$, que constituya una traducción de la frase «*el número natural x cumple la condición Q'*». Sea q el número de Gödel de la fórmula $Q(x)$; vamos a estudiar la fórmula $Q(q^o)$ de T.

En primer lugar observamos que, puesto que $Q(x)$ es una fórmula del tipo que acabamos de describir, q tiene que satisfacer la cláusula 1).

Por tanto, lo que interesa es estudiar la cláusula

2ª) *si T es no contradictoria y si* $Q(q^o)$ *es demostrable en T, también* $\overline{Q(q^o)}$ *ha de ser demostrable en T.*

La frase «*T es no contradictoria*» se traduce en T mediante la fórmula NC; las frases «$Q(q^o)$ *es demostrable en T*» y «$\overline{Q(q^o)}$ *es demostrable en T*» se traducirán, respectivamente, por las fórmulas [que llamaremos] A y B. Por otra parte, si T es no contradictoria y si $Q(q^o)$ es demostrable en T, ocurrirá que $\overline{Q(q^o)}$ no será demostrable en T, hecho que se expresa mediante la fórmula

(a) $$NC \rightarrow (A \rightarrow \overline{B}),$$

que en cualquier caso será demostrable en T. Observemos que la cláusula 2ª) se traduce mediante la fórmula

(b) $$NC \rightarrow (A \rightarrow B),$$

que, evidentemente, está implicada por la fórmula $Q(q^o)$.

I) Supongamos, primeramente, que tanto la fórmula NC como la $Q(q^o)$ sean demostrables de T. Por ser $Q(q^o)$ demostrable en T, para comprobar que A es verdadera bastará efectuar un simple cálculo; por consiguiente,

(c) $$A$$

será demostrable en T. Pero si las fórmulas NC, a), b) y c) son demostrables en T, esta teoría, T, ha de ser contradictoria, cosa

descartada por la suposición hecha inicialmente. En consecuencia, *si NC es demostrable en T, no puede ocurrir que* $Q(q^o)$ *sea demostrable en T.*

II) Sea (*nc*) la traducción en *T* de la frase «*NC es demostrable en T*»; entonces, al traducir el razonamiento I) llegaremos a una demostración en *T* de la fórmula

(d) $$(nc) \rightarrow \bar{A}.$$

III) Supongamos ahora que *NC* sea demostrable en *T:* en tal caso, para comprobar que (*nc*) es verdadera bastará un simple cálculo, de modo que esta fórmula será asimismo demostrable en *T*.

Pero una vez demostradas d) y (*nc*), se llega a la fórmula *A* por medio del *modus ponens;* y, por otro lado, $\bar{A}$ implica la fórmula b), luego si *NC* es demostrable en *T*, también lo serán b) y $Q(q^o)$. Ahora bien, según I), no es posible que tanto *NC* como $Q(q^o)$ sean demostrables; luego es imposible que *NC* sea demostrable en *T*.

IV) Supongamos que $\overline{Q(q^o)}$ sea demostrable en *T*. Entonces la negación de la fórmula b) será demostrable en *T*, y, en consecuencia, *NC* será demostrable en *T*, cosa que contradice a la conclusión a que habíamos llegado en III); por consiguiente, la fórmula $\overline{Q(q^o)}$ no puede ser demostrable en *T*.

V) Supongamos, por fin, que $Q(q^o)$ sea demostrable en *T*. Entonces cabe comprobar la verdad de la fórmula *A* mediante un simple cálculo, luego es demostrable en *T;* y en virtud de la conclusión a que habíamos llegado en II), la fórmula $\overline{(nc)}$ será, pues, demostrable en *T*.

Ahora bien, es perfectamente sabido que en cualquier teoría contradictoria *todo* es demostrable; e inversamente, la no demostrabilidad en *T* de una fórmula, cualquiera que ésta sea, implica la no contradicción de *T*. En particular, cabe demostrar en *MT* el enunciado «*si NC no es demostrable en T, T es no*

contradictoria»; y al traducir en T esta demostración llegaríamos a una demostración en T de la fórmula

(e) $$\overline{(nc)} \rightarrow NC.$$

Por consiguiente, si $\overline{(nc)}$ fuese demostrable en T, también lo sería NC, cosa que contradiría a la conclusión obtenida en III). De donde resulta que $Q(q^o)$ no es demostrable en T.

Así, pues, hemos asentado los *teoremas de limitación* de Gödel (1931):

I. *Si un sistema formal, T, es no contradictorio e incluye el correlativo aritmético de su propia metamatemática, MT, existe una fórmula, $Q(q^o)$, que no es posible demostrar ni refutar en T.*

II. *En la medida en que la metamatemática, MT, de semejante sistema, T, admita una aritmetización en T, no permitirá demostrar la no contradicción de T.*

Observación 1. El número q cumple la condición Q_T. En efecto, q es, por definición, el número de Gödel de cierta fórmula de T, $Q(x)$, y

en cuanto a 1ª): esta cláusula es verdadera, ya que la fórmula $Q(x)$ es una fórmula del tipo en cuestión;

en cuanto a 2ª): la fórmula $Q(q^o)$ no es demostrable en T, luego esta cláusula es trivialmente verdadera, ya que una de las dos suposiciones que intervienen en ella (a saber, «*$Q(q^o)$ es demostrable en T*») es falsa †††.

Por cumplir q la condición Q_T, también cumplirá la condición Q', equivalente a ella. Mas, puesto que la fórmula $Q(x)$ constituye la traducción en T de la frase «*el número natural x cumple la condición Q'*», de ello resulta que la fórmula $Q(q^o)$ es verdadera.

††† Recuérdese nuestra nota anterior a este mismo § 20: tenemos aquí un caso en el que el condicional «$(C \& D) \rightarrow B$» es vacua o trivialmente verdadero, ya que, al ser «C» falso, también lo será «$C \& D$». (*N. del T.*)

Observación 2. La demostración que acabamos de ofrecer de los teoremas de Gödel no es completa; y lo que ante todo falta es la construcción efectiva de la fórmula $Q(q^o)$. Para llevarla a cabo sería necesario, en primer lugar, dar una descripción precisa de un sistema formal apropiado, T, descripción que nos permitiría asignar a cada fórmula, X, de T un número de Gödel, $g(X)$; y luego pasaríamos a la aritmetización de MT, lo cual permitiría, por fin, construir la fórmula $Q(q^o)$.

Además, hemos afirmado sin demostración que ciertos razonamientos que presentamos en los apartados I) y V) pueden «traducirse» a T.

Observación 3. La condición Q_T que hemos introducido difiere algo de otras condiciones análogas propuestas por Gödel y por otros autores con la misma finalidad; hemos elegido precisamente ésta porque así se tiene la ventaja de que las demostraciones se hacen un poco más transparentes.

Observación 4. Podría pensarse que los resultados de Gödel proporcionan una objeción a los esfuerzos encaminados a formalizar las teorías deductivas. Ahora bien, semejante concepción no está justificada: en principio, los teoremas de Gödel afectan a todas las teorías deductivas, T, formalizadas o no, que cumplan ciertas condiciones bastante generales; y si las teorías formalizadas parecen quedar más comprometidas que las otras, ello se debe a que los teoremas pueden demostrarse en lo que a ellas respecta con mayor rigor.

Observación 5. Del razonamiento que hemos hecho en V) se deduce que la fórmula $Q(q^o)$ no es demostrable en T, y, en consecuencia, que el enunciado «*el número natural q cumple la condición* Q_T» no es demostrable en MT; pero en la observación 1) habíamos hecho ver que q tiene que cumplir dicha condición.

Mas no se encierra en todo ello antinomia alguna. En el razonamiento de la observación 1) interviene el paso siguiente:

$$\frac{Q(q^o) \text{ no es demostrable en } T}{\therefore \text{ el enunciado «}Q(q^o) \textit{ es demostrable en } T\text{» } \textit{es falso.}}$$

Este paso, sin embargo, no es compatible con los principios

metodológicos del formalismo hilbertiano: en efecto, en la conclusión aparece cierta propiedad del enunciado «*$Q(q^o)$ es demostrable en T*» que no tiene un carácter puramente *formal*, ya que se refiere a la *significación* de tal enunciado; y por tanto, esta conclusión se sale del restringido marco de la metamatemática *MT* en la medida en que ésta, *en virtud de su carácter formal,* admita ser aritmetizada en *T*.

La intervención de la *noción de verdad* y de la apelación a la *significación* de los símbolos es aquí esencial: pues su exclusión de *MT* es —entre otras cosas— lo que hace a este sistema incapaz de demostrar la no contradicción de *T;* y, por otra parte, si se amplía *MT* de tal suerte que quepan en él pasos no formalistas, se hace imposible aritmetizar *MT* sin otros recursos que los de *T*.

Cabe caracterizar el alcance negativo de los descubrimientos de Gödel diciendo que han provocado una *nueva crisis de fundamentos.*

Para el logicismo y el cantorismo lo embarazoso es, principalmente, el primer teorema de limitación. Pues lo que ellos pretendían era desplegar en la base una gran lógica, T^{ooo}, que permitiese efectuar un desarrollo unificado del conjunto de las matemáticas; ahora bien, todos los sistemas T^{ooo} hasta ahora propuestos cumplen las condiciones para que les sea aplicable el primer teorema de limitación, con tal que se esté dispuesto a admitir que no son contradictorios. De ahí que sea posible construir para cada sistema T^{ooo} una fórmula $Q(q^o)$ que admita una interpretación aritmética y sea verdadera en esta interpretación, y que no quepa demostrar ni refutar en ese mismo T^{ooo}.

El segundo teorema de limitación afecta sobre todo al formalismo radical de Hilbert. El programa de la metamatemática hilbertiana exige, en efecto, que se justifique la aceptación de un sistema determinado, F^{ooo}, demostrando que no es contradictorio; y para evitar toda sospecha de círculo vicioso, semejante demostración no habría de valerse sino de argumentos de tal evidencia intuitiva que no hubieran menester de justificación alguna por parte de ninguna gran lógica. Pero acabamos de averiguar que para demostrar la no contradicción

de una gran lógica, digamos la $T^{\circ\circ\circ}$, es preciso recurrir a principios que excedan del marco de $T^{\circ\circ\circ}$.

Con objeto de restablecer el equilibrio, voy a mencionar siquiera algunos resultados que hagan visible el alcance positivo de los teoremas de Gödel. Supongamos que se tengan dos sistemas formales, *T' y T''*, y que este último permita asentar la no contradicción del primero; en tal caso cabe concluir que los recursos de *T''* exceden a los de *T'*, o sea, que *T''* es «más fuerte» que *T'*. J. G. Kemeny (1949) ha demostrado que la teoría de conjuntos de Zermelo es más fuerte que la teoría russelliana de los tipos lógicos, y J. Barkley Rosser (1954), que el sistema quiniano de los *New Foundations* [*of Mathematical Logic* (1937, revisado en Quine, 1953] es más fuerte que aquella teoría de conjuntos; así pues, los resultados de Gödel nos permiten «evaluar» la fuerza relativa de las diversas «*grandes lógicas*».

§ 21. La deducción natural: Gentzen, Curry, Lorenzen.— Estos últimos resultados exceden con mucho el cuadro inicial de la metamatemática hilbertiana. Ahora bien, es palmario que semejante cuadro era excesivamente limitado: incluso para demostrar la no contradicción de la aritmética elemental es preciso salirse del marco de esta disciplina; mas, por otra parte, este problema se convierte en algo casi trivial si se echa mano de los recursos de la teoría de conjuntos.

Queda aún, sin embargo, una cuestión que no hemos planteado todavía: pues podría intentarse demostrar la no contradicción de la aritmética elemental con los métodos más «débiles» posibles. En este orden de ideas deben mencionarse en primer lugar los trabajos de Gentzen; y voy a examinar, principalmente, el nuevo método de este autor para formalizar la lógica —o, más bien, para describir el razonamiento deductivo.

Supongamos que se pretenda asentar la no contradicción de un sistema determinado de axiomas, *A*, para la aritmética elemental. Es sabido que el sistema *A* permitirá deducir, entre otras, la fórmula $1 = 1$; por consiguiente, para que *A* sea no contradictorio es necesario y suficiente que no pueda deducirse en él la fómula $1 \neq 1$; y bastará, pues, con mostrar que no

es posible realizar una deducción de esta última fórmula a partir de A.

Si una fórmula, a la que llamaremos X, puede extraerse de los axiomas A, existirá, en general, una gran cantidad de deducciones posibles. De ahí que en una investigación que quiera mostrar que ciertas fórmulas X no son deductibles esté indicado limitar de antemano las posibilidades de deducción; si bien será preciso, evidentemente, que cualquier fórmula, X, que fuese deductible antes de introducir tales restricciones continúe siéndolo tras haberlas introducido. Con esta finalidad, Herbrand había señalado que podía fijarse para las deducciones una *forma canónica*; continuando esta idea, Gentzen ha introducido la noción de *deducción sin rodeos*. El ideal consiste, evidentemente, en no admitir más que una sola deducción para cada fórmula deductible, X; y entonces, si una fórmula determinada ($1 \neq 1$, por ejemplo), es demostrable, cabrá caracterizar *a priori* su deducción.

Las observaciones que siguen valdrán para preparar el estudio de los métodos de Gentzen.

1.° Supongamos que se plantee el problema de deducir, partiendo de ciertas premisas, K, la conclusión $U \to V$; para resolver este problema sería un paso muy natural añadir a las premisas la fórmula U y tratar de deducir la conclusión V a partir de (K, U).

2.° Vamos a suponer ahora que para deducir cierta conclusión, L, contemos con la premisa $U \to V$ (además de con otras premisas, K); para sacar partido de la premisa $U \to V$ será natural que intentemos

1) deducir la conclusión U a partir de las premisas K y $U \to V$, *y*
2) deducir la conclusión L a partir de las premisas K, $U \to V$ y V.

3.° En el caso 2.°, parte 1), puede suceder que al intentar deducir U se encuentre uno con una deducción de la conclusión inicial, L; entonces habrá quedado resuelto el problema inicial; por ello puede formularse de nuevo la propuesta 1) en el sentido de que lo que se intentará es

1) deducir a partir de las premisas K y $U \rightarrow V$, o bien la conclusión L o la conclusión U.

4.º En los dos casos que acabamos de examinar, la *deducción inicial,* que habíamos planteado como el problema a resolver, se reduce a una o dos deducciones más sencillas; pues estas *deducciones subordinadas* se distinguen de la deducción inicial, ya sea por haberse añadido nuevas premisas (casos 1.º y 2.º, 2), ya por ofrecer, a elección, una nueva conclusión (casos 1.º y 2º., 1).

5.º El hecho de que la reducción de una deducción propuesta pueda dar lugar a unas deducciones subordinadas que ofrezcan, a elección, diversas conclusiones, explica por qué admite Gentzen, en general, deducciones en las que entren en juego desde el principio, junto a un número cualquiera de premisas, un número cualquiera de conclusiones. Si bien, de acuerdo con lo que es usual, las premisas se utilizan *simultáneamente* (en el sentido de que las tendremos todas a nuestra disposición en cada una de las deducciones subordinadas), en tanto que las conclusiones, por el contrario, se toman en consideración *alternativamente* (en el sentido de que en cada una de las deducciones subordinadas que se obtengan al ir reduciendo sucesivamente la deducción inicial bastará con llegar a una fórmula cualquiera que elijamos de entre las conclusiones).

6.º Subrayemos, por fin, que las nuevas fórmulas que la reducción de la deducción propuesta introduce a título de premisas o de conclusiones adicionales son siempre *subfórmulas* (o *fórmulas parciales*) de las fórmulas que tuviéramos en la deducción inicial como premisas o como conclusiones. En el caso de la lógica de enunciados, de esta observación se sigue que una serie de reducciones sucesivas ha de tener siempre final.

Tras todas estas observaciones heurísticas voy a exponer una versión simplificada del método de deducción según Gentzen, en la medida en que este método se aplica a una versión restringida de la *lógica de enunciados* (clásica o bivalente), en la que no entren más [operadores proposicionales] que la *negación* (—) y la *implicación* [material] (→); y llamaremos F a un sistema de esta índole.

Vamos a emplear la siguiente notación para toda *deducción propuesta* (o *problema deductivo*) caracterizado por las Premisas $U_1, U_2, \ldots, U_m$ y las conclusiones $V_1, V_2, \ldots, V_n$:

Premisas	Conclusiones
U_1	V_1
U_2	V_2
...	...
U_m	V_n

o

Premisas	Conclusiones
K	L

De todo diagrama de estos tipos diremos que se trata de una *secuencia.* Tomadas en conjunto, las premisas constituyen el *antecedente,* y las conclusiones, el *consecuente* de la secuencia; y a menudo emplearemos las notaciones $K, K', K'', \ldots$ y L, L', L'', respectivamente, para el antecedente y el consecuente, ya sea tomados íntegramente o en parte. El orden relativo de las fórmulas, tanto en el antecedente como en el consecuente, carece de importancia.

Bastará desarrollar un poco esta notación para formular fácilmente unos *esquemas de reducción* de secuencias [5]:

(i^a)

Premisas	Conclusiones
K	L
$\bar{U}$	
———	———
	U

(i^b)

Premisas	Conclusiones
K	L
	$\bar{U}$
———	———
U	

(ii^a)

Premisas		Conclusiones	
K		L	
$U \to V$			
———	———	———	———
(i)	(ii)	(i)	(ii)
	V	U	

(ii^b)

Premisas	Conclusiones
K	L
	$U \to V$
———	———
U	V

(iii)

Premisas	Conclusiones
K	L
U	U
═══	═══

[5] *Nota del editor.*—Hemos conservado la notación original del autor (cifras romanas minúsculas, i, ij, iij, iv, ...) en estos esquemas de reducción y en los cuadros semánticos, lo mismo que se hacía en el

En estos esquemas se escriben las secuencias resultantes de la reducción como continuaciones de la secuencia inicial, si bien no se repiten ni el antecedente ni el consecuente de ésta (que se encontraban por encima de la línea horizontal). Vamos a explicar en pocas palabras los distintos esquemas.

Con respecto a (i^{a}).—Si en el antecedente aparece la fórmula $\overline{U}$, se añade al consecuente la fórmula U; pues si en alguna deducción subordinada se llegase a la conclusión U, el antecedente, que incluye la premisa $\overline{U}$, quedaría reducido al absurdo, y ello justificaría toda conclusión, y, en particular, todas y cada una de las conclusiones contenidas en L.

Con respecto a (i^{b}).—Si en el consecuente aparece la fórmula $\overline{U}$, se añade al antecedente la fórmula U, apelando al principio del tercio excluso: pues, o bien se tiene U, cosa que justificaría la adjunción al antecedente de la fórmula U, o bien se tiene $\overline{U}$, lo cual justificaría que en el consecuente se encuentre la conclusión $\overline{U}$.

Con respecto a (ii^{a}).—Es el caso 2.º de hace un momento.

Con respecto a (ii^{b}).—Es el caso 1.º arriba examinado.

Con respecto a (iii).—Si en el antecedente y en el consecuente aparece una y la misma fórmula, es evidente que cabe hacer la deducción, lo cual vuelve superflua toda reducción; «*cierre*» que se expresa por la doble línea horizontal.

De acuerdo con las ideas de Gentzen, los esquemas de reducción nos permiten, en general, reducir una secuencia a otras secuencias más sencillas (cf. el apartado 4.º); y es claro que, a su vez, estas últimas podrán someterse a otra reducción, y así sucesivamente. Cabe representar mediante un *cuadro deduc-*

---

artículo ya publicado en los «Études d'Épistémologie génétique», t. I, estudio IV, págs. 131-4 [en la vers. cast. de aquel fascículo de los citados «Études», publicada con el título de *Psicología, lógica y comunicación. Epistemología genética e investigación psicológica* (Buenos Aires, Nueva Visión [«Interciencia»], 1959), se conservaba tal notación íntegramente en las páginas correspondientes, o sea, las 133-6; nosotros, sin embargo, hemos creído preferible sustituir siempre la «j» por la «i», ya que de otro modo la extrañeza que causan los símbolos resultantes desvía la atención del lector y dificulta algo la comprensión (*T.*)].

tivo una serie de secuencias resultante de las reducciones sucesivas efectuadas a partir de cierta secuencia inicial.

Premisas		Conclusiones	
(1) A (2) $\overline{C} \rightarrow (A \rightarrow B)$ (3) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$		(4) C	
(i)	(ii) (6) $B \rightarrow C$	(i) (5) A	(ii)
(iii)	(iv) (8) $A \rightarrow B$	(iii) (7) $\overline{C}$	(iv)
(v) (9) C		(v)	
(vi)	(vii) (11) B	(vi) (10) A	(vii)
(viii)	(ix) (13) C	(viii) (12) B	(ix)

De la observación 6.ª se sigue que en el caso que nos ocupa toda serie de reducciones sucesivas del tipo descrito tiene que llegar siempre a un final; y si entonces, todas y cada una de las *secuencias finales* permiten la aplicación del esquema (iii), puede comprobarse que, de hecho, la deducción inicial habrá resultado ser posible. Pero conviene que ilustremos la situación por medio de un ejemplo concreto.

Vamos a mostrar que partiendo de las premisas A, $\overline{C} \rightarrow (A \rightarrow B)$ y $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ se puede deducir la conclusión C; al hacerlo obtenemos el cuadro deductivo de esta página.

Mas antes de continuar voy a explicar la construcción de

este cuadro analizando sus sucesivas etapas. En primer término aplicamos el esquema de reducción (ii[a]), tomando la premisa (3) como fórmula $U \rightarrow V$; de este modo la deducción propuesta se reduce a dos deducciones subordinadas, que son las siguientes:

(i) partiendo de las premisas (1) a (3), deducir, o bien la conclusión añadida (5) o la conclusión inicial (4); problema que se resuelve inmediatamente aplicando una vez el esquema de cierre (iii), y

(ii) partiendo de las premisas (1) a (3) y la premisa añadida (6), deducir la conclusión (4); problema que no cabe resolver más que tras efectuar varias reducciones sucesivas.

Continuación de (ii). — Si tomamos ahora la premisa (2) como fórmula $U \rightarrow V$ del esquema (ii[a]), esta deducción se reduce a dos deducciones subordinadas, o sea, a las siguientes:

(iii) partiendo de las premisas (1) a (3) y (6), deducir, ya sea la conclusión añadida (7), ya la conclusión inicial (4); y

(iv) partiendo de las premisas (1) a (3) y (6), y de la premisa añadida (8), deducir la conclusión (4).

Continuación de (iii).—Podemos elegir cualquiera de las dos conclusiones (7) y (4), por lo cual trataremos de llegar a la conclusión $\overline{C}$. En este caso está indicado recurrir a un razonamiento indirecto fundado en la suposición de que se tenga C, razonamiento que constituye la deducción (v), subordinada a la (iii) y que da lugar a un resultado inesperado: en lugar de llegar a la conclusión a que nos dirigíamos, (7), nos encontramos directamente con la (4); ahora bien, al explicar el esquema de reducción (i[b]) —que es el que hemos aplicado para pasar de la deducción (iii) a la (v)—, habíamos observado que un resultado inesperado de esta índole permite considerar terminada la segunda deducción —esto es, la (v), en nuestro caso— apelando al principio del tercio excluso; de modo que ahora tenemos, o bien C, cosa que justificaría la adjunción de la premisa C, y,

por consiguiente, la aceptación de la conclusión (4), o bien $\overline{C}$, lo cual justificaría la aceptación de la conclusión (7), que habíamos tenido en cuenta en primer lugar. Así pues, como la deducción subordinada (v) ha quedado acabada, la (iii) también habrá terminado.

Continuación de (iv).—Aplicamos de nuevo el esquema (ii^a^), tomando esta vez la premisa (8) como fórmula $U \rightarrow V$; y así obtenemos dos deducciones subordinadas, la (vi) y la (vii). La deducción (vi) lleva inmediatamente a la conclusión (10).

Continuación de (vii). — Una última aplicación del esquema (ii^a^), con la premisa (6) como fórmula $U \rightarrow V$, da lugar a dos deducciones subordinadas (viii) y (ix), que originan respectivamente las conclusiones (12) y (4).

Ahora bien, el éxito de las deducciones (viii) y (ix) implica el de la deducción (vii), el éxito de las deducciones (vi) y (vii) implica el de la (iv), y el de las (iii) y (iv), el de la deducción (ii); y, por fin, el éxito de las deducciones (i) y (ii) implica el de la deducción inicial.

Hay que decir en primer lugar que un cuadro deductivo de esta índole no constituye una deducción propiamente dicha, sino que representa, más bien, un análisis de las posibilidades de efectuar la deducción inicial. Y cuando —como sucede en el ejemplo que hemos puesto— todas y cada una de las deducciones correspondientes a las secuencias finales se acaban en una aplicación del esquema de cierre (iii), este análisis hace ver que, de hecho, cabe efectuar la deducción propuesta por cualquier método deductivo, con tal de que el que se quiera utilizar permita las reducciones y el cierre de una deducción según están representados, respectivamente, por los esquemas (i^a^) a (iii).

Ahora bien, hay numerosos métodos deductivos que cumplen esta condición; y no tenemos necesidad de ir a buscarlo muy lejos, ya que podemos obtener un método deductivo sumamente conveniente: a saber, el *sistema formal F*, supuesto que admitamos que un *cuadro deductivo cerrado* cualquiera efectúa la deducción propuesta, o sea, la correspondiente a su secuencia inicial. Así, por definición, el sistema *F* permitirá las

reducciones y el cierre que se realicen de acuerdo con los esquemas (i[a]) a (iii).

(Si quisiéramos estar de acuerdo con la costumbre establecida, sería preciso invertir los esquemas (i) y (ii), de modo que tales esquemas de *reducción* se convirtieran en esquemas de *deducción.* Si, momentáneamente, empleamos la notación que sigue para las secuencias,

$$U_1, U_2 \ldots, U_m \vdash V_1 V_2 \ldots, V_n \quad \text{o} \quad K \vdash L,$$

(subrayando de nuevo que el orden relativo de las fórmulas en el antecedente y en el consecuente carece de importancia), obtenemos, como base del sistema *F,* los esquemas deductivos y el esquema axiomático siguientes:

$$(\text{i}^a) \quad \frac{K, \bar{U} \vdash L, U}{K, \bar{U} \vdash L} \qquad\qquad (\text{i}^b) \quad \frac{K, U \vdash L, \bar{U}}{K \vdash L, \bar{U}}$$

$$(\text{ii}^a) \quad \frac{K, U \to V \vdash L, U \text{ y } K, U \to V, V \vdash L}{K, U \to V \vdash L}$$

$$(\text{ii}^b) \quad \frac{K, U \vdash L, U \to, V, V}{K \vdash L, U \to V} \qquad\qquad (\text{iii}) \quad K, U \vdash L, U$$

Sin embargo, bajo esta forma el sistema *F* presentaría el inconveniente de todas las versiones corrientes del sistema *LK* de Gentzen: el de permitir deducciones con rodeos. Estas se deben a una elección no óptima de los momentos de aplicación del esquema (iii) al comienzo de la deducción; pero en su forma original el sistema *F* no permite tales elecciones.

Otra ventaja de la forma original es que permite relacionar muy estrechamente este sistema y el sistema *NK* de Gentzen.

Más adelante haremos ver que el sistema *F* es completo.

Nuestro sistema formal constituye, por así decirlo, una síntesis de los sistemas *LK* y *NK* de Gentzen, lo cual presenta todavía otras ventajas adicionales: en particular, no se suscita el problema de la reducción de una deducción cualquiera a una

de forma canónica o *sin rodeos,* ya que en el sistema *F* no están permitidas sino las deducciones de forma normal o sin rodeos, en el sentido de Herbrand y de Gentzen.

Una vez dada la secuencia inicial para una deducción propuesta, la construcción del cuadro deductivo queda prescrita de forma casi unívoca: para cada fórmula que aparezca no hay más que un solo esquema de acuerdo con el cual quepa «tratarla»; lo único que cabe elegir es el orden relativo de «tratamiento» de las distintas fórmulas, de modo que si se fija tal orden no queda sino una sola manera de proceder. En especial, la elección de los momentos de aplicación del esquema de cierre, (iii), está determinada por los datos del problema.

Lo que tiene interés desde un punto de vista filosófico es que —como veremos en el § 23— quepa determinar en forma sencilla y completa la construcción de los cuadros deductivos valiéndose de consideraciones semánticas apoyadas (en el caso actual) en la significación de los símbolos '—' y '→'.

Tal vez esta circunstancia explique por qué ciertos autores, especialmente Curry[6] (aunque en Carnap y en Lorenzen encontramos concepciones semejantes) han sentado el principio de que «*la significación de cada concepto está determinada por las condiciones bajo las cuales se lo introduzca en el discurso*». Sin embargo, en mi opinión, esta forma de ver las cosas, sin duda alguna inspirada por el formalismo hilbertiano, no es correcta; pues la aceptación de la óptica formalista se ha debido a una situación histórica sumamente peculiar, que fue resultado del descubrimiento de las paradojas lógicas y de la esperanza de poder justificar las matemáticas clásicas por medio de una demostración de no contradicción que no recurriese más que a los razonamientos más elementales; ahora bien, hemos comprobado que, en virtud de los resultados de Gödel, semejante esperanza es vana. En tales circunstancias, el formalismo puede seguir constituyendo un punto de vista sumamente útil en el contexto de una investigación particular determinada, pero no es aceptable, en absoluto, en cuanto filosofía completa de la lógica y de las matemáticas.

Por otra parte, la *negación* y la *implicación* se han empleado

---

6 CURRY, 1957, pág. 25.

desde la antigüedad con la significación «técnica» que se les atribuye en la lógica contemporánea. Fueron especialmente los estoicos quienes demostraron tener unas ideas muy claras al respecto y comprender perfectamente su importancia para los fundamentos de la lógica; en ellos, la construcción de la lógica formal estaba enteramente de acuerdo con la significación «técnica» que atribuían a la negación, la implicación y las demás constantes lógicas; pero el nivel de rigor que alcanzaron no permitiría, en modo alguno, determinar la significación de las constantes lógicas, de acuerdo con el programa de Curry, a partir de las condiciones en las que se las introduzca en el discurso; y si en algunas ocasiones presentaron las leyes y reglas de la lógica formal bajo una forma puramente axiomática, no dejaron, con todo, de justificar esta axiomatización apelando a la significación de las constantes lógicas, significación que daban siempre por supuesta.

En los comienzos de la lógica moderna, la significación «técnica» de estas constantes constituía un dato más que un problema; así, Frege consiguió presentar la primera formalización adecuada de la lógica teniendo en cuenta tal significación (o bien, su *denotación* y su *sentido*). La construcción de una formalización abstracta que permita, por decirlo así, «descifrar» los símbolos utilizados constituye un camino iniciado más recientemente; pero esta construcción, aunque sin duda sumamente interesante, es también desde el punto de vista del pensamiento real, sumamente artificial.

§ 22. La sintaxis y la semántica.—Vamos ahora a detenernos, a título de ilustración, en dos enunciados metamatemáticos, que son los siguientes:

1) al aplicar el *modus ponens* a las premisas

$$7 > 2 \rightarrow 7 + 1 > 2 \quad \text{y} \quad 7 > 2,$$

se obtiene la conclusión

$$7 + 1 > 2;$$

2) la fórmula $(x)(Ey)(x < y)$ es verdadera.

El primer enunciado tiene un carácter puramente *formal,* y para comprobar que es válido basta darse cuenta de la forma «tipográfica» de las tres fórmulas que entran en él. Mas el segundo enunciado, por el contrario, no es de índole puramente formal: para comprobar su validez es preciso tener en cuenta el hecho de que las variables «x» e «y» se refieren al dominio de los números naturales, dominio que resulta ordenado por la relación que hemos simbolizado con «$<$» de tal forma que, dado un número natural cualquiera, existe otro número natural que lo exceda.

Muchos matemáticos, influidos por el formalismo hilbertiano, tenderían a negar la diferencia entre uno y otro caso; para ello dirían que si la fórmula en cuestión es verdadera, es que cabe deducirla a partir de los axiomas de la teoría de los números naturales, que constituyen una «definición implícita» del concepto de número natural; y que para comprobar que dicha fórmula admite tal deducción basta percatarse de cuál es la forma «tipográfica» de las fórmulas que constituyen su deducción. Así pues, el segundo enunciado poseería un carácter puramente formal, ni más ni menos que el primero.

Sin embargo, ya no es posible sostener semejante concepción, muy en boga en su tiempo. Imposibilidad que se sigue, por ejemplo, de los trabajos de Gödel: pues hemos comprobado que, dada una teoría deductiva que abarque, al menos, cierta parte de la aritmética formalizada, cabe siempre construir una fórmula, $Q(q^{o})$, que exprese la atribución de cierta propiedad aritmética, Q_{T}, a cierto número natural, q, y que no sea demostrable en T, pese a ser verdadera en el sentido de que q habrá de tener forzosamente la propiedad Q_{T}; así pues, comprobar que $Q(q^{o})$ sea verdadera es cosa distinta de comprobar que tal fórmula sea demostrable en T.

Acaso se sienta la tentación de responder que esta sorprendente situación se explica por el hecho de que el sistema deductivo considerado, T, haya resultado ser incompleto, y que, pese a todo, la verdad de una forma aritmética, U, podría reducirse a la demostrabilidad de U en cierto sistema deductivo más idóneo, T^{o}. Pero semejante respuesta es inadmisible, dado que los resultados de Gödel afectan a todo sistema deductivo, T, que

satisfaga ciertas condiciones muy razonables y que, por consiguiente, es imposible sentar un sistema deductivo, T°, que posea propiedades razonables y abarque todas las fórmulas verdaderas de la aritmética.

Independientemente de los resultados gödelianos, Tarski (1929) ha demostrado la imposibilidad de reducir el concepto de verdad (particularmente en la medida en que es aplicable a los enunciados aritméticos) al de demostrabilidad en un sistema deductivo apropiado, T°. Es evidente que entre ambos grupos de resultados existen relaciones muy estrechas, si bien no nos vamos a ocupar de ellas en este trabajo.

En virtud de todo este conjunto de resultados, se impone distinguir con toda claridad entre dos sectores de la metamatemática, a los que se suele denominar, respectivamente, *sintaxis* y *semántica.*

La sintaxis, cuya formalización se debe principalmente a Carnap (1934), conserva el severo formalismo que caracterizaba a la metamatemática hilbertiana, por más que haya abandonado las restricciones derivadas del finitismo de Hilbert. La semántica, desarrollada por Tarski a partir de 1929, abandona el formalismo y el finitismo.

Así, pues, la sintaxis constituye una primera ampliación de la metamatemática, según Hilbert. Pues, por ejemplo, permite introducir conjuntos y sucesiones arbitrarios (lo mismo finitos que infinitos) de fórmulas, lo cual da lugar, por mediación de los números de Gödel, a la introducción de conjuntos y sucesiones arbitrarios de números naturales; ahora bien, el estudio de semejantes conjuntos y sucesiones excede de los dominios de la aritmética elemental y pertenece al análisis.

La semántica admite también que se introduzcan conjuntos y sucesiones arbitrarios de fórmulas, pero, además, hace intervenir un aparato conceptual que permite estudiar la *significación* de ciertos símbolos y la *verdad* o *falsedad* de ciertas fórmulas. Este proceder ha suscitado vivas protestas, por ser incompatible con algunas concepciones muy generalizadas, según las cuales, en particular,

1) los conceptos de *significación*, de *verdad* y de *falsedad* conllevan un elemento psicológico que impide realizar

un análisis que pretenda alcanzar el nivel del rigor matemático, y

2) los conceptos mencionados, en la medida en que se los aplique a símbolos y enunciados matemáticos, apelan a una concepción realista acerca de las entidades matemáticas.

Por ejemplo, según la concepción 1), para analizar la significación de la cifra «3» sería preciso apelar a investigaciones psicológicas referentes a las circunstancias en las que se utilice y comprenda semejante cifra. Y, de acuerdo con la concepción 2), al atribuir a esta cifra una significación determinada postulamos forzosamente la existencia de cierta entidad platónica cuyo *nombre* sería precisamente la cifra «3».

En opinión de Tarski, la fuente de las dificultades que se hallan en la construcción de una semántica exacta y deductiva se encuentra en otra parte. Sea T una teoría formalizada tal y como la descrita en el § 20, y sea MT la *metamatemática en sentido ampliado* que le corresponda (por consiguiente, MT habrá de incluir, además de la metamatemática según Hilbert, la sintaxis y la semántica del sistema T). A través de los números de Gödel cabrá aritmetizar en T cierta parte de MT, por ejemplo, MT^o; y vamos a suponer, en particular, que MT^o permita formular la siguiente condición: «*el número natural x es el número de Gödel de una fórmula verdadera de T*»; en tal caso, T contendrá cierta fórmula, $V(x)$, que constituirá la traducción de aquella frase.

También podemos (como habíamos hecho en el § 20) construir cierta fórmula, $Q(q^o)$, que posea las propiedades expresadas por el primer teorema de limitación; y sea p el número de Gödel de semejante fórmula. Vamos a estudiar las fórmulas $V(p^o)$ y $V(p^o) \rightarrow Q(q^o)$.

I) En el § 20, observación 1, habíamos hecho ver que la fórmula $Q(q^o)$ es verdadera; de ello se sigue que 1) la fórmula $V(p^o)$ es verdadera y que 2) también lo es la fórmula $V(p^o) \rightarrow$ $\rightarrow Q(q^o)$.

Aclaración de 1).—Puesto que p es el número de Gödel de la fórmula $Q(q^o)$, que es verdadera, p satisface la condición $V(x)$, por lo cual $V(p^o)$ es verdadera.

Aclaración de 2).—Puesto que tanto $V(p^\circ)$ como $Q(q^\circ)$ son verdaderas, la implicación [material] $V(p^\circ) \to Q(q^\circ)$ también lo será.

II) Sin embargo, es imposible que tanto $V(p^\circ)$ como $V(p^\circ) \to Q(q^\circ)$ sean fórmulas demostrables en T; pues si lo fuesen ambas, también lo sería $Q(q^\circ)$, lo cual contradiría al primer teorema de limitación.

Ahora bien, esta conclusión hace patente el carácter inadecuado de MT° en cuanto aparato semántico: si $V(p^\circ)$ no es demostrable en T, es que no es posible demostrar en MT° que $Q(q^\circ)$ es una fórmula verdadera; y si $V(p^\circ) \to Q(q^\circ)$ no es demostrable en T, entonces no se podrá demostrar la proposición «*si* $Q(q^\circ)$ es verdadera, se tiene $Q(q^\circ)$».

Mas no se trata de un mal irremediable: del hecho de que MT° sea inadecuada no se deduce que lo sea también MT. Pero el razonamiento de Tarski hace ver que, con objeto de constituir un aparato semántico adecuado, MT tiene que ser «esencialmente más rica» que su subsistema MT° (el que es susceptible de «traducción» a T); y la construcción efectiva de un sistema MT idóneo mostrará luego qué equipo complementario habrá que instalar en MT.

§ 23. **El método de los cuadros semánticos.**—La comprensión del presente parágrafo será muchísimo más fácil si el lector quiere olvidar momentáneamente cuanto hemos dicho hasta aquí acerca de la deducción lógica: ahora se trata de abordar la cuestión por un método enteramente nuevo; y más tarde señalaremos las relaciones existentes con lo que hemos estudiado anteriormente.

Supongamos que se quiera comprobar cuál es la fuerza demostrativa de los dos razonamientos siguientes:

(I)	(II)
Ningún mamut es un pavo real	*Algunos pavos reales no son mamuts.*
Todo saltamontes es un mamut.	*Algunos mamuts no son saltamontes.*
∴ *Ningún pavo real es un saltamontes.*	∴ *Algunos pavos reales no son saltamontes.*

Vamos ahora a considerar, juntamente con estos dos, *todos* los razonamientos que cabe obtener al sustituir.

mamut por *manatí, mandril, merluza, mirlo, morueco, murciélago*, ...,

pavo real por *pantera, perdiz, perezoso, petirrojo, pitón, puma*, ..., y

saltamontes por *saíno, salamandra, salmón, sardina, serpiente, somormujo*, ...

De los innumerables razonamientos que se obtendrán al proceder de esta forma voy a citar solamente dos, como ejemplo:

(I')

Ningún manatí es un petirrojo.
Toda sardina es un manatí.

∴ *Ningún petirrojo es una sardina.*

(II')

Algunas pitones no son mirlos.
Algunos mirlos no son serpientes.

∴ *Algunas pitones no son serpientes.*

Ahora bien, el razonamiento (II') presenta la particularidad de que las dos premisas son *verdaderas*, pero la conclusión es *falsa*. Esta es la razón por la que denegamos toda fuerza demostrativa no sólo a (II'), sino asimismo a (II) y *todo* razonamiento que tenga igual forma que éstos.

Observación 1.—Decimos que dos razonamientos tienen *la misma forma* cuando se obtienen uno a partir del otro por sustitución de los términos del tipo que entre en cuestión.

Por otra parte, de todos los razonamientos resultantes a partir del (I) mediante una sustitución de términos no hay ninguno que tenga las premisas verdaderas y la conclusión falsa; y por esta razón atribuimos fuerza demostrativa al razonamiento (I) y a cualesquiera otros con la misma forma.

1) Se dice que la sustitución de los términos originales *mamut, pavo real* y *saltamontes* por *mirlo, pitón* y *serpiente*, res-

pectivamente, proporciona un *contraejemplo*, que permite recusar la [pretendida] fuerza demostrativa del razonamiento (II). Así pues, valiéndonos del concepto de contraejemplo podemos enunciar el *criterio fundamental de la fuerza demostrativa.*

Para que un razonamiento tenga fuerza demostrativa no tiene que admitir ningún contraejemplo.

Este criterio se ha aplicado y reconocido desde el primer momento en que los hombres se han esforzado por razonar de manera lógica; y, entre otros, lo utilizaron Platón y Aristóteles. Cabe suponer que se ha aprendido a evitar los raciocinios no concluyentes a medida que los adversarios los rechazaban mediante contraejemplos apropiados; sin embargo, sólo muy recientemente ha salido a la superficie el fundamental carácter de este criterio. Vamos a ver inmediatamente que es posible extraer directamente de él los principios de un método de deducción formal enormemente sencillo y transparente.

2) Según parece, en todo raciocinio intervienen ciertos elementos que admiten ser *sustituidos*, a los cuales llamamos *términos*, y que en el caso de nuestros ejemplos eran *mamut*, *pavo real* y *saltamontes*. Además existen otros elementos a los que no afecta la sustitución de términos. Aquéllos determinan el *contenido* del razonamiento del caso, y éstos caracterizan su *forma*. Ciñéndonos a los ejemplos dados, cabe caracterizar las respectivas formas de los dos razonamientos mediante los siguientes esquemas:

(I°)	(II°)
Ningún M es un P	*Algunos P no son M.*
Todo S es un M.	*Algunos M no son S.*
∴ *Ningún P es un S.*	∴ *Algunos P no son S.*

La fuerza demostrativa de los raciocinios no depende más que de su forma. Dicho de otro modo: si un razonamiento de una forma dada es concluyente, igualmente lo será cualquier otro que tenga igual forma que él; y si un razonamiento de una forma dada no es concluyente, tampoco lo será ningún

otro de su misma forma. En concreto, todo raciocinio de la forma (I°), que constituye el llamado modo CELANTES de la silogística tradicional, será concluyente, en tanto que todo el que tenga la forma (II°) no lo será. Así encontramos una expresión completa del *carácter formal de la lógica en tanto que teoría del raciocinio*.

3) Hay algo en el procedimiento que acabamos de aplicar que no es enteramente satisfactorio, y es el hecho de que la búsqueda de un contraejemplo se efectúe al azar: pues si damos con uno, será evidente que el raciocinio en cuestión no era concluyente, pero si, pese a tentativas largas y pacientes, no encontramos ningún contraejemplo apropiado, ello no prueba, en modo alguno, la fuerza demostrativa del razonamiento dado.

Para obviar este inconveniente, que es inherente al procedimiento empleado, basta completarlo de tal manera que la búsqueda del contraejemplo no se realice al acaso, sino sistemáticamente; y entonces, al comprobar el fracaso de la búsqueda, podremos estar seguros de que no existe contraejemplo alguno apropiado y de la fuerza demostrativa del raciocinio dado.

4) Expresando los raciocinios mediante fórmulas se simplificará considerablemente la descripción del procedimiento así ampliado (o *método de los cuadros semánticos*); vamos a utilizar los símbolos siguientes:

1) los términos indeterminados *A, B, C, ..., M, P, S*;
2) los nombres individuales indeterminados *a, b, c, ...*;
3) las variables individuales *x, y, z, ...*;
4) la negación, —, la adyunción *,V, la conyunción, &, y la implicación [material, o sea, el condicional], →, y

* Empleamos, siguiendo a LORENZEN (*Formale Logik*, Berlín, W. de Gruyter [«Sammlung Göschen»], 1962, pág. 39) y, con él, a BEHMANN (en un artículo de 1939), la palabra «adyunción» para este símbolo, y no la casi universalmente adoptada de «disyunción» [*disjonction, disjunction, Disjunktion*], que sólo puede dar lugar a la mala inteligencia de interpretar su papel análogamente al «o» excluyente (*aut ... aut ...*, en latín), y no, según debe ser, como equivalente al «o» incluyente (... *vel* ..., en latín). (*N. del T.*)

5) los cuantificadores universales (x), (y), (z) ..., y los cuantificadores existenciales (Ex), (Ey), (Ez),...

A partir de tales símbolos construimos primeramente las *fórmulas atómicas,*

6) $A(a)$, $A(b)$, $A(c)$, ..., $A(x)$, $A(y)$, ..., $B(a)$, $B(b)$, ..., $B(x)$, ..., $C(a)$, ..., $M(a)$, $M(b)$, ..., $M(x)$, ..., $P(a)$, ...

A continuación construimos fórmulas compuestas siguiendo las reglas

7) si U es una fórmula, también serán fórmulas $\overline{U}$, $(x)U$, $(y)U$, ..., $(Ex)U$, $(Ey)U$, ..., y

8) si U y V son fórmulas, también lo serán $U \vee V$, $U \& V$ y $U \rightarrow V$.

Observación 1.—Para evitar que «se confundan las variables libres con las ligadas» es preciso someter a ciertas restricciones la aplicación de las reglas 7) y 8). En caso de que una fórmula, U, incluya una parte $(x)W$ o $(Ex)W$ y tal que x aparezca en W, se dirá que x está ligada en (dicha parte de) U; y si x aparece en U sin estar ligada, se dirá que está libre en esta fórmula. [Y las restricciones mencionadas son las que enunciamos a continuación.] Las fórmulas $(x)U$ y $(Ex)U$ no podrán construirse más que si x está libre en U, y lo mismo sucederá con y, z, ... Además, no se podrán construir las fórmulas $U \vee V$, $U \& V$ y $U \rightarrow V$ más que en caso de no haya ninguna variable que esté libre en U y ligada en V, o a la inversa.

Con U, V, W, ... simbolizaremos, en general, fórmulas *cerradas,* esto es, que no contengan variables libres; en cambio, $U(x)$, $U(y)$, ..., $V(x)$, ... serán fórmulas en las que la variable indicada estará libre; y, análogamente, x e y estarán libres en $U(x, y)$, etc.

Observación 2.—Con frecuencia conviene admitir términos

relacionales indeterminados, $R, T, \ldots$ Estos términos aparecerán en fórmulas atómicas del género de las siguientes:

$$R(a, a), R(a, b), R(a, c), \ldots, R(a, x), R(a, y), \ldots, R(b, a), R(b, b), \ldots, R(b, x), \ldots, R(c, a), \ldots, R(x, a), R(x, b), R(x, x), \ldots, R(x, y), \ldots, R(y, a), \ldots, R(y, x), \ldots$$

(En ocasiones se emplean los símbolos $A, B, \ldots$ como aserciones indeterminadas sin analizar.)

5) Al interpretar las fórmulas se refiere uno a cierto dominio, **D**, de objetos individuales. Los términos $A, B, C, \ldots$ representarán, entonces, los predicados **A**, **B**, **C**, ..., aplicables a los objetos de **D**; los nombres indeterminados $a, b, c, \ldots$ denotarán los objetos a, b, c, ... de **D**, mientras que los variables $x, y, z, \ldots$ abarcarán [todas y cada una de ellas] *todos* los objetos de **D**.

Entonces, $A(a)$ expresa la atribución del predicado **A** al objeto **a** de **D**; $A(x)$ expresa la suposición (o la condición) de que el predicado **A** convenga a un objeto, x, de **D**; $\overline{U}$ expresa la negación de U; $(x)U$ expresa el hecho (o la suposición) de que todo objeto x de **D** satisfaga la condición U; $(Ex)U$ expresa el hecho de que haya al menos un objeto en **D** que satisfaga la condición U; $U \vee V$ expresa el hecho de que se tengan ya U, ya V [*ya ambos*]; $U \,\&\, V$ expresa la afirmación simultánea de U y de V, y, finalmente, $U \rightarrow V$ expresa la afirmación de V supuesta la condición U.

6) Admitido todo esto, volvemos a la cuestión de la fuerza demostrativa de los raciocinios (I) y (II). Vamos a examinar primero el caso de (I). Las premisas y la conclusión quedarán representadas respectivamente por las fórmulas que siguen:

(1) $\overline{(Ex)\,[M(x)\ \&\ P(x)]}$

(2) $(y)\,[S(y) \rightarrow M(y)]$

(3) $\overline{(Ez)\,[P(z)\ \&\ S(z)]}$

En el cuadro siguiente está representada la tentativa de encontrar un contraejemplo que permitiese rechazar el racioci-

nio (I); y el fracaso de semejante tentativa hace ver que no hay ningún contraejemplo apropiado, por lo cual tal razonamiento es concluyente.

Verdadero	Falso
(1) $\overline{(Ex)[M(x) \& P(x)]}$	(3) $\overline{(Ez)[P(z) \& S(z)]}$
(2) $(y)[S(y) \rightarrow M(y)]$	(4) $(Ex)[M(x) \& P(x)]$
(5) $(Ez)[P(z) \& S(z)]$	(10) $S(a)$
(6) $P(a) \& S(a)$	
(7) $P(a)$	(12) $M(a) \& P(a)$
(8) $S(a)$	
(9) $S(a) \rightarrow M(a)$	(13) $M(a)$ | (14) $P(a)$
| (11) $M(a)$	

7) La construcción de este cuadro se funda en las consideraciones que siguen, las cuales, a su vez, están justificadas por la interpretación que acabamos de dar a las fórmulas que utilizamos (y de ahí el nombre de «*cuadro semántico*»).

Fórmulas (1) a (3): dada su posición en el cuadro, estas fórmulas recuerdan las condiciones que imponemos a todo contraejemplo apropiado.

Fórmula (4): si la fórmula (1) ha de ser verdadera, la (4) tiene que ser falsa.

Fórmula (5): si la fórmula (3) tiene que ser falsa, la (5) ha de ser verdadera.

Fórmula (6): si la fórmula (5) ha de ser verdadera, en **D** ha de haber al menos un individuo que cumpla la condición $P(z) \& S(z)$; y si damos a tal individuo el nombre de *a*, la fórmula (6) tiene que ser verdadera.

Fórmulas (7) y (8): si la fórmula (6) tiene que ser verdadera, estas dos fórmulas han de serlo también.

Fórmula (9): si la fórmula (2) tiene que ser verdadera, todo objeto de **D** y, en particular, el individuo al que acabamos de dar el nombre de a, ha de cumplir la condición $S(y) \rightarrow M(y)$; por lo cual la fórmula (9) ha de ser verdadera.

Fórmulas (10 y (11): empezamos por no tener en cuenta más que la fórmula (9); ahora bien, el implicante [o condición], $S(a)$, tiene que ser, o bien falso o bien verdadero; y vamos a desdoblar el cuadro dividiéndolo en dos columnas: la primera posibilidad está representada por la fórmula (10), y en cuanto a la segunda, si tanto la fórmula $S(a) \rightarrow M(a)$ como la $S(a)$ son verdaderas, igualmente ha de serlo la fórmula $M(a)$; de donde se tiene la (11); mas una vez llegados a este punto, comprobamos que la fórmula (8), o sea, $S(a)$, debería ser verdadera; por consiguiente, está excluida la «primera posibilidad», lo cual se expresa por el cierre del cuadro correspondiente.

Fórmula (12): si la fórmula (4) tiene que ser falsa, no debe haber en **D** objeto alguno que cumpla la condición $M(x)$ & $P(x)$; cosa que sucederá, en particular, con el objeto a, y por lo tanto, la fórmula (12) tiene que ser falsa.

Fórmulas (13) y (14): de momento nos ocupamos solamente de la fórmula (12): si ésta ha de ser falsa, o bien la fórmula (13) o la (14) han de serlo; de modo que llegamos de nuevo a un desdoblamiento del cuadro; pero comprobamos inmediatamente que las posibilidades sugeridas por la posición en el cuadro de las fórmulas (13) y (14) están excluidas por las condiciones que se expresan con las fórmulas (11) y (7), respectivamente; y al quedar cerrados los dos subcuadros correspondientes, es palmario que no se encontrará jamás contraejemplo alguno.

8) En lo que se refiere al raciocinio (II), encontramos el cuadro que sigue:

Verdadero	Falso
(1) $(Ex)[P(x) \& \overline{M(x)}]$	(3) $(Ez)[P(z) \& \overline{S(z)}]$
(2) $(Ey)[M(y) \& \overline{S(y)}]$	(7) $M(a)$
(4) $P(a) \& \overline{M(a)}$	(11) $S(b)$
(5) $P(a)$	(12) $P(a) \& \overline{S(a)}$
(6) $\overline{M(a)}$	(13) $P(a)$ | (14) $\overline{S(a)}$
(8) $M(b) \& \overline{S(b)}$	
(9) $M(b)$	(16) $P(b) \& \overline{S(b)}$
(10) $\overline{S(b)}$	(17) $P(b)$ | 18 $\overline{S(b)}$
(15) $S(a)$	
(19) $S(b)$	

Esta vez bastarán unas pocas palabras explicativas. Cada una de las fórmulas (1) y (2) pide la existencia de un objeto que cumpla cierta condición; pero como no tenemos razón alguna para suponer que tales objetos sean (o puedan ser) idénticos entre sí, les hemos dado nombres distintos, *a* y *b*; y de ahí las fórmulas (4) y (8). Por otra parte, ni el objeto a ni el b tienen que cumplir la condición $P(z) \& \overline{S(z)}$, razón por la cual tenemos las fórmulas (12) y (16).

Una vez descompuestas todas las fórmulas, la construcción acaba sin que queden cerrados todos los sub-cuadros. Las fórmulas $P(a)$, $S(a)$ y $M(b)$ tienen que ser verdaderas, mientras que las $M(a)$, $P(b)$ y $S(b)$ han de ser falsas; por consiguiente, en el dominio **D** tiene que haber dos objetos, **a** y **b**, tales que **a** satisfaga los predicados **P** y **S** y **b** no los satisfaga, y, además, que **b** satisfaga el predicado **M** y **a**, no. Si tomamos como ejemplo un «universo» formado por una pitón, **a**, y un mirlo, **b**, conseguimos así un contramodelo, **<D, M, P, S>**, que permite rechazar el raciocinio **(II)**.

9) Los dos casos examinados presentan, en cierto sentido, un carácter paradigmático. Pues con objeto de contestar a la pregunta acerca de si hay que atribuir fuerza demostrativa a un raciocinio que, partiendo de ciertas premisas, U_1, U_2, ..., U_m, llegue a determinada conclusión, V, podemos siempre recurrir a la construcción de un cuadro semántico análogo a los anteriores; y de este modo se tiene que obtener, forzosamente, uno de los dos resultados siguientes:

I) Que el cuadro quede «*cerrado*». Esto quiere decir que fracasará cualquier tentativa sistemática —y, por consiguiente, *toda* tentativa— de lograr un contraejemplo; por lo tanto, no habrá contraejemplo alguno idóneo, de modo que la conclusión V será, verdaderamente, consecuencia lógica de las premisas U_1, U_2 ..., U_m.

II) Que el cuadro no quede cerrado. En tal caso será posible «leer», apoyándose en él, un contraejemplo, que permitirá rechazar todo raciocinio que conduzca a la conclusión V a partir de las premisas U_1, U_2, ..., U_m.

(10) Ahora podemos dar la *solución definitiva* del problema de Locke y Berkeley de que nos habíamos ocupado en el capítulo 1. Supongamos, en efecto, que se haya formalizado la geometría elemental empleando X, Y, Z, ... como variables cuyos valores sean puntos cualesquiera; si expresamos mediante $Tr(X, Y, Z)$ la condición de que los puntos X, Y y Z formen un triángulo, y con $U(X, Y, Z)$ la condición por la cual la suma de los ángulos XZY, XYZ e YZX ha de ser igual a dos rectos, el teorema tratado por Kant se expresa con la fórmula

(1) $$(X)(Y)(Z)[Tr(X, Y, Z) \quad U(X, Y, Z)].$$

Sea K el conjunto de los axiomas de la geometría (a los que se añadirán eventualmente las definiciones y teoremas precedentes). Entonces, será posible construir el cuadro semántico correspondiente a un raciocinio que conduzca, partiendo

de las premisas de *K*, a la fórmula (1) como conclusión; y las primeras etapas de tal construcción serán:

Verdadero	Falso
K	(1) $(X)(Y)(Z)[Tr(X, Y, Z) \rightarrow U(X, Y, Z)]$
(5) $Tr(A, B, C)$	(2) $(Y)(Z)[Tr(A, Y, Z) \rightarrow U(A, Y, Z)]$
	(3) $(Z)[Tr(A, B\ Z) \rightarrow U(A, B, Z)]$
	(4) $Tr(A, B, C) \rightarrow U(A, B, C)$
	(6) $U(A, B, C)$

Dado que la fórmula (1) es una consecuencia lógica de las premisas contenidas en *K*, es evidente que semejante cuadro quedará cerrado. Mas, a la inversa, este cuadro sugiere una demostración de (1) a partir de *K*, demostración que tendrá, a grandes rasgos, la estructura siguiente:

K
(5) $Tr(A, B, C)$
...
(6) $U(A, B, C)$
(4) $Tr(A, B, C) \rightarrow U(A, B, C)$
(3) $(Z)[Tr(A, B, Z) \rightarrow U(A, B, Z)]$
(2) $(Y)(Z)[Tr(A, Y, Z) \rightarrow U(A, Y, Z)]$
(1) $(X)(Y)(Z)[Tr(X, Y, Z) \rightarrow U(X, Y, Z)]$

Ahora bien, lo que suscitó el problema de Locke y Berkeley fue una demostración de este mismo tipo: primeramente se añade a las premisas la fórmula (5), esto es, «Sea *ABC* un triángulo cualquiera»; luego se demuestra la (6), o sea, «La suma de los ángulos del triángulo *ABC* es igual a dos rectos»; se deshace uno de la premisa adicional enunciando la conclusión en forma hipotética, tal como «Si *ABC* es un triángulo, ...», y, por fin, se generaliza la conclusión.

Puede concluirse, pues, a mi juicio, que la curiosa estruc-

tura de esta demostración no tiene relación alguna con una pretendida intervención de la intuición, sino que está determinada por la estructura de la conclusión.

11) Será conveniente que precisemos un poco los principios fundamentales del método de los cuadros semánticos. Para simplificar las explicaciones, voy a ceñirme exclusivamente a fórmulas construidas a partir de aserciones indeterminadas sin analizar (o *átomos*), *A*, *B*, *C*, ..., valiéndose de la negación, «—», y de la implicación [material, o sea, el condicional], «→»; entonces tendremos las *reglas semánticas* siguientes:

(S 1) si U es verdadera, $\overline{U}$ será falsa, y a la inversa;

(S 2) si U es falsa o V es verdadera, $U \rightarrow V$ será verdadera; y si U es verdadera y V es falsa, $U \rightarrow V$ será falsa.

Una vez que se haya elegido un valor veritativo (verdadero o falso) para cada átomo, *A*, *B*, *C*, ..., el valor veritativo de cualquier fórmula compuesta queda determinado unívocamente en virtud de las reglas (S 1) y (S 2).

Supongamos que se quieran elegir los valores veritativos de los átomos *A*, *B*, *C*, ..., de tal manera que todas las fórmulas de cierto conjunto, *K*, se vuelvan verdaderas, en tanto que todas las de otro conjunto, *L*, se conviertan en falsas; y simbolizaremos del modo siguiente semejante *problema de evaluación*:

Verd.	Falso
K	L

Para resolver este problema podrán utilizarse los *esquemas de reducción* que siguen:

(i^{a})

Verd.	Falso
K	L
$\overline{U}$	
	U

(i^{b})

Verd.	Falso
K	L
	$\overline{U}$
U	

(ii^a^)

Verdadero		Falso	
K		L	
$U \to V$			
(i)	(ii)	(i)	(ii)
	V	U	

(ii^b^)

Verd.	Falso
K	L
	$U \to V$
U	

(iii)

Verd.	Falso
K	L
U	U

12) Supóngase que queramos saber cuál es la fuerza demostrativa de cierto raciocinio que lleve a la conclusión Z a partir de ciertas premisas, K. Intentemos encontrar un contraejemplo apropiado construyendo un cuadro semántico en el que, para empezar, insertemos las premisas, K, en la columna de la izquierda, y la conclusión, Z, en la de la derecha; dicho de otro modo, tratemos de resolver el problema de evaluación simbolizado por

Verd.	Falso
K	Z

valiéndonos de los esquemas de reducción (i) a (iii), es decir, estos esquemas constituyen a la vez las reglas de construcción y de cierre de los cuadros semánticos.

El procedimiento aplicado puede conducir a dos resultados distintos:

I) Que el cuadro quede cerrado; en tal caso no puede existir ningún contraejemplo, por lo cual el razonamiento dado será concluyente.

II) Que el cuadro no quede cerrado; entonces podremos

«leer», a partir de él, los valores veritativos que será preciso elegir para los diversos átomos con objeto de que todas las premisas de *K* se vuelvan verdaderas, y la conclusión, *Z*, se vuelva falsa.

Supongamos que el cuadro así construido quede cerrado. En este caso conviene observar que los esquemas de reducción para los problemas de evaluación son idénticos a los correspondientes a los problemas deductivos, y que estos últimos esquemas, a su vez, corresponden a los esquemas de deducción de cierta variante, *F*, del sistema *LK* de Gentzen; por consiguiente, cabrá dar una nueva forma al cuadro semántico cerrado y convertirlo en una deducción en el sistema *F*. Por el contrario, si el cuadro no queda cerrado, no podrá haber una deducción correspondiente a él en este sistema (el cual es, desde luego, una versión más perfeccionada del *F* que habíamos visto en el § 21).

Todas estas observaciones se referían a fórmulas de un tipo especial; sin embargo, siguen siendo válidas en el caso general. Por ejemplo, el cuadro cerrado correspondiente al raciocinio (I) da lugar en el sistema *F* a la siguiente deducción:

$$(1),\ (5)\text{-}(6),\ P(a) \vdash (3)\text{-}(4),\ M(a)\ \&\ P(a),\ P(a)$$

$$(1)\text{-}(2),\ (9),\ M(a) \vdash (4),\ M(a)\ \&\ P(a),\ M(a)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$(1)\text{-}(2),\ (5)\text{-}(7),\ (9),\ (11) \vdash (3),\ (Ex)[M(x)\ \&\ P(x)],\ M(a)\ \&\ P(a)$$

$$(1)\text{-}(2),\ (5)\text{-}(7),\ S(a) \rightarrow M(a),\ M(a) \vdash (3),\ (Ex)[M(x)\ \&\ P(x)]$$

$$(2),\ (5),\ S(a),\ S(a) \rightarrow M(a) \vdash (3),\ S(a)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$(1),\ (y)[S(y) \rightarrow M(y)],\ (5)\text{-}(8),\ S(a) \rightarrow M(a) \vdash (3)\text{-}(4)$$

$$(1)\text{-}(2),\ (5),\ P(a)\ \&\ S(a),\ P(a),\ S(a) \vdash (3)\text{-}(4)$$

$$(1)\text{-}(2),\ (Ez)[P(z)\ \&\ S(z)],\ P(a)\ \&\ S(a) \vdash (3)\text{-}(4)$$

$$(1)\text{-}(2),\ (Ez)[P(z)\ \&\ S(z)] \vdash \overline{(Ez)[P(z)\ \&\ S(z)]},\ (4)$$

$$\overline{(Ex)[M(x)\ \&\ P(x)]},\ (2) \vdash (3),\ (Ex)[M(x)\ \&\ P(x)]$$

$$(1)\text{-}(2) \vdash (3)$$

§ 24. Concepciones algebraicas y topológicas.—En el fondo, en la construcción de un cuadro semántico, lo único que se hacía era buscar un solo contraejemplo, una sola evaluación

apropiada. Vamos a poner a punto ahora un aparato que permita caracterizar todos los modelos, todas las evaluaciones apropiadas, teniendo en cuenta las fórmulas que se obtengan, a partir de los átomos $A(.)$, $B(.)$ y $R(.,.)$, por medio de la negación, la conyunción, la implicación [material] y los cuantificadores universales.

Supondremos que todos los nombres individuales indeterminados, $a, b, c, \ldots, p, q, \ldots$, habrán de denotar realmente unos objetos, **a, b, c**, ..., **p, q**, ..., y que **D** estará formado exactamente por todos los objetos así denotados. Por otro lado, no nos ocuparemos sino de los modelos, $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{R} \rangle$, que quepa obtener eligiendo los predicados **A, B** y **R** aplicables a los objetos de **D**, por lo cual el valor veritativo de cada fórmula será relativo a la elección del modelo **M.** Es necesario introducir unas reglas semánticas suplementarias:

(S 3) si U y V son verdaderas, también lo será U & V; y si U es falsa o lo es V [o ambas lo son], U & V lo será asimismo;

(S 4) si todas las fórmulas $U(a)$, $U(b)$, $U(c)$, ..., $U(p)$, $U(q)$, ... son verdaderas, la fórmula $(x)U(x)$ también será verdadera; y si alguna de las fórmulas $U(a)$, $U(b)$, $U(c)$, ..., $U(p)$, $U(q)$, ... es falsa, también lo será $(x)U(x)$; y análogamente en lo que respecta a $(y)U(y)$, $(z)U(z)$, ...; y

(S 5) las fórmulas $A(p)$, $B(p)$ y $R(p, q)$ serán verdaderas, respectivamente, si el objeto **p** posee el predicado **A**, si el objeto **p** posee el predicado **B** y si los objetos **p** y **q** satisfacen el predicado **R**; en caso de que esto no ocurra, serán falsas.

1) Parece preferible, sin embargo, emplear otra terminología. En lugar de decir que la fórmula U es *verdadera*, o que es *falsa*, diremos que $w(U)=2$ o que $w(U)=0$, respectivamente; entonces la evaluación, w, es una función que asocia a cada fórmula, U, el valor $w(U)=2$ o el valor $w(U)=0$ de acuerdo con las reglas siguientes:

(S' 1) si $w(U)=2$, se tendrá $w(U)=0$; y a la inversa;

(S' 2) si $w(U)=0$ o bien $w(V)=2$, se tendrá $w(U \to V)=2$; y si $w(U)=2$ y $w(V)=0$, se tendrá $w(U \to V)=0$;

(S' 3) si $w(U)=w(V)=2$, se tendrá $w(U \,\&\, V)=2$; y si $w(U)=0$ o bien $w(V)=0$ [o ambas cosas], se tendrá $w(U \,\&\, V)=0$; y

(S' 4) si $w[U(a)]=w[U(b)]=w[U(c)]=\ldots w=[U(p)]=\ldots=$ $=2$, se tendrá $w[(x)U(x)] = w[(y)U(y)] =$ $=w[(z)U(z)]=\ldots=2$; y si no ocurre así, $w[(x)U(x)]=$ $=w[(y)U(y)]=\ldots=0$.

Cada evaluación, *w*, está determinada de manera unívoca por la elección de los valores $w[A(p)]$, $w[B(p)]$ y $w[R(p, q)]$ asociados a las fórmulas atómicas. Es fácil comprobar que existe una correspondencia biunívoca entre las evaluaciones *w* y los modelos M.

2) Siendo *U* una fórmula cualquiera, sea $H(U)$ el conjunto de todas las evaluaciones, *w*, tales que sea $w(U)=2$, y designemos con 1 el conjunto de todas las evaluaciones *w*. Entonces, las reglas (S' 1) a (S' 4) dan lugar a estas otras:

(S'' 1) $H(\bar{U}) = 1 - H(U)$;
(S'' 2) $H(U \to V) = [1 - H(U)] + H(V)$;
(S'' 3) $H(U \,\&\, V) = H(U) \cdot H(V)$;
(S'' 4) $H[(x)U(x)] = \bigcup_{p \,\varepsilon\, D} H[U(p)]$.

3 El problema de evaluación representado por

Verd.	Falso
U_1	V_1
U_2	V_2
...	...
U_m	V_m

consistirá ahora en evaluar el conjunto

$$H(U_1) \cdot H(U_2) \cdot \ldots \cdot H(U_m) — H(V_1) — H(V_2) — \ldots — H(V_n)$$

que simbolizaremos por $H(K) — H(L)$. Semejante problema admite las siguientes reducciones:

(i^a) $H(K) \cdot H(\overline{U}) — H(L) = H(K) \cdot H(\overline{U}) — \mathrm{H}(L) — H(U);$

(i^b) $H(K) — H(L) — H(\overline{U}) = H(K) \cdot H(U) — H(L) — H(\overline{U});$

(ii^a) $H(K) \cdot H(U \rightarrow V) — H(L) = [H(K) \cdot H(U \rightarrow V) — H(L) — H(U)] + [H(K) \cdot H(U \rightarrow V) \cdot H(V) — H(L)];$

(ii^b) $H(K) — H(L) — H(U \rightarrow V) = H(K) \cdot H(U) — H(L) — H(U \rightarrow V) — H(V);$

(iii^a) $H(K) \cdot H(U \& V) — H(L) = H(K) \cdot H(U \& V) \cdot H(U) \cdot H(V) — H(L);$

(iii^b) $H(K) — H(L) — H(U \& V) = [H(K) — H(L) — H(U \& V) — H(U)] + [H(K) — H(L) — H(U \& V) — H(V)];$

(iv^a) $H(K) \cdot H[(x)U(x)] — H(L) = H(K) \cdot H[(x)U(x)] \cdot H[U(a)] \cdot H[U(b)] \cdot \ldots — H(L);$

(iv^b) $H(K) — H(L) — H[(x)U(x)] = \underset{\mathbf{p} \,\varepsilon\, \mathbf{D}}{\cup \&} \{ H(K) — H(L) — H[(x)U(x)] — H[U(p)] \};$

(v) $H(K) \cdot H(U) — H(L) — H(U) = \phi.$

La construcción del cuadro semántico correspondiente al razonamiento (I) queda reemplazada por el siguiente cálculo (en el que los números 1, 2, 3, ... se refieren a las fórmulas que aparecían en dicho cuadro):

$$H(1) \cdot H(2) — H(3) = \overline{H[(Ex)[\ldots]]} \cdot H(2) — H(3) =$$

$$= H\overline{[(Ex)[\ldots]]} \cdot H(2) — H\overline{[(Ez)[\ldots]]} — H[(Ex)[\ldots]] =$$

$$= H(1) \cdot H(2) \cdot H[(Ez)[\ldots]] — H(3) — H(4) =$$

$= H(1) \cdot H(2) \cdot H(5) \cdot H[P(a) \,\&\, S(a)] - H(3) - H(4) =$

$= H(1) \cdot H(2) \cdot H[(y)[\ldots]] \cdot H(6) \cdot H[P(a)] \cdot H[S(a)] - H(3) - H(4) =$

$= H(1) \cdot H(2) \cdot H[(y)[\ldots]] \cdot H(6) \cdot H(7) \cdot H(8) \cdot H[S(a) \rightarrow M(a)] - H(3) - H(4) =$

$= H(1) \cdot H(2) \cdot H(5) \cdot H(6) \cdot H(7) \cdot H[S(a)] \cdot H(9) - H(3) - H(4) - H[S(a)] + [H(1) \cdot H(2) \cdot H(5) \cdot H(6) \cdot H(7) \cdot H(8) \cdot H(9) \cdot H[M(a)] - H(3) - H[(Ex)[\ldots]] =$

$= \varnothing + [H(1) \cdot H(2) \cdot H(5) \cdot H(6) \cdot H(7) \cdot H(8) \cdot H(9) \cdot H(11) - H(3) - H(4) - H[M(a) \,\&\, P(a)] =$

$= H(1) \cdot H(2) \cdot H(5) \cdot H(6) \cdot H(7) \cdot H(8) \cdot H(9) \cdot H[M(a)] - H(3) - H(4) - H(12) - H[M(a)] + H(1) \cdot H(2) \cdot H(5) \cdot H(6) \cdot H[P(a)] \cdot H(8) \cdot H(9) \cdot H(11) - H(3) - H(4) - H(12) - H[P(a)] = \varnothing + \varnothing = \varnothing.$

La importancia de esta reducción en los problemas lógicos a problemas algebraicos proviene, principalmente, de la posibilidad de sacar partido de los conceptos y métodos creados por la moderna álgebra abstracta; si bien no hay que sobrestimar la significación de los métodos algebraicos en la lógica en cuanto a la práctica del raciocinio lógico.

4) Más natural es la introducción de métodos topológicos. Aún no hemos dicho nada de la extensión del dominio **D**; ahora bien, se comprueba que la construcción de los cuadros semánticos no acaba forzosamente tras un número finito de pasos; y si así ocurría en los dos ejemplos paradigmáticos presentados, ello se debía a una elección a propósito de éstos.

Supóngase, por ejemplo, que se haya de calificar el raciocinio siguiente:

$$\frac{(x)(Ey)[A(x, y) \rightarrow A(x, x)]}{\therefore (z)A(z, z)}$$

Los primeros pasos en la construcción del cuadro semántico correspondiente son:

Verdadero	Falso
(1) $(x)(Ey)[A(x, y) \rightarrow A(x, x)]$	(2) $(z)A(z, z)$
(4) $(Ey)[A(a, y) \rightarrow A(a, a)]$	(3) $A(a, a)$
(5) $A(a, b) \rightarrow A(a, a)$	
	(6) $A(a, b)$ | ═══
| (7) $A(a, a)$ ═══	
	(10) $A(b, c)$ |
(8) $(Ey)[A(b, y) \rightarrow A(b, b)]$	
(9) $A(b, c) \rightarrow A(b, b)$	
| (11) $A(b, b)$	

Está claro que la construcción continuaría indefinidamente; pues habrá que aplicar la fórmula (1) al objeto **c**, que precisamos introducir en virtud de la fórmula (8); entonces se obtiene una fórmula (12), análoga a (8), que nos obliga a introducir un nuevo objeto, **d**, al que habrá que aplicar a continuación la fórmula (1), etc. En cuanto a las fórmulas análogas a la (9), producen una división en subcuadros.

Es evidente que si el caso es algo más complicado será menester llevar la cuenta del cierre de una parte de los subcuadros, cosa que puede convertir el desarrollo en algo sumamente irregular.

En el caso de que en un cuadro semántico exista una serie infinita de subcuadros encajados sucesivamente uno en otro, se demuestra con facilidad que tal serie proporciona un contraejemplo.

Para ello bastará demostrar que en todo cuadro semántico, *C*, que contenga un número infinito de fórmulas existirá una de tales series de subcuadros encajados sucesivamente. Vamos a razonar del modo que sigue:

Cada una de las fórmulas, *X*, que aparezcan en un cuadro semántico, *C*, determinará cierto subcuadro, $C^{(x)}$, resultante de las divisiones a que haya estado sometido *C* antes de la

aparición de *X*; si $C^{(x)}$ contiene un número finito de fórmulas diremos que *X* es una *fórmula de primera especie* en *C*, y si el número de fórmulas contenidas en $C^{(x)}$ es infinito, diremos que *X* es una *fórmula de segunda especie.*

Suprimamos ahora en *C* todas las fórmulas de primera especie, y sea C^{o} el cuadro resultante de tal operación.

I) En caso de que C^{o} no contenga fórmula alguna, es que todas las fórmulas iniciales de *C* eran de primera especie; por consiguiente, en *C* no habría más que un número finito de fórmulas, lo cual está en contradicción con la suposición de partida.

II) En caso de que C^{o} contenga al menos una fórmula, se compondrá totalmente de series infinitas de subcuadros encajados sucesivamente, puesto que ninguna fórmula, *X*, de segunda especie puede ser la última de un subcuadro.

La construcción de todo cuadro semántico no cerrado continuará indefinidamente con tal de que no se detenga prematuramente debido a haberse agotado el dominio **D**. Así pues, es preciso suponer que **D** es *infinito*, y suele adoptarse para tal dominio el conjunto de los números naturales.

Si consideramos las series de subcuadros encajados sucesivamente como si fuesen los *puntos* de cierto espacio, *M*, en el que los entornos estuviesen formados por subcuadros, *M* sería un espacio topológico-dimensional, compacto y separable; y cabe entonces entender cierto número de teoremas lógicos como manifestaciones de ciertas propiedades de los espacios topológicos *M*. Las consideraciones de esta índole constituyen el análogo contemporáneo de los estudios tradicionales sobre los llamados círculos de Euler (cf. el capítulo 1, §7)[7].

---

7 Mostowski, 1949, y Beth, 1955.

§ 25. **La tipología de los matemáticos.**—En el parágrafo siguiente veremos que sabemos extraordinariamente poco acerca del pensamiento matemático propiamente dicho, y, en especial, del pensamiento creador. A lo que se añade que lo poco que sabemos, por derivarse en gran medida de la introspección, debe interpretarse y utilizarse con la máxima prudencia: no solamente porque quienes nos lo dicen son matemáticos que no son además, necesariamente, psicólogos, y que, por si fuese poco, difícilmente pueden ser considerados observadores desinteresados, sino principalmente porque, según todo hace sospechar, los escasos matemáticos verdaderamente creadores que han intentado informarnos con más o menos pormenor de sus experiencias íntimas no representan, en modo alguno, un tipo único de pensamiento.

Basta una simple consideración *a priori*, unida a datos de diverso origen, para entrever la necesidad de tener en cuenta, junto a los principios corrientes de clasificación, otros extremos de tipo específico, a saber:

1) el carácter más o menos consciente de las operaciones mentales que eventualmente conduzcan a la solución de los problemas que se traten de resolver;
2) la índole de tales operaciones mentales: operaciones que manejen palabras, símbolos, imágenes espaciales o temporales, representaciones visuales, auditivas, motrices, etc.;

3) las exigencias relativas al rigor;
4) la amplitud o restricción del campo de intereses; y
5) la preferencia por el trabajo solitario o por el trabajo en común.

En este orden de ideas conviene recordar la distinción, hecha por Poincaré, entre los «*lógicos*», que atacan los problemas «mediante el análisis», y los «*intuitivos*», que prefieren atacarlos «mediante la geometría»: así se tocan, indudablemente, unas diferencias profundas de actitud; pues, en ocasiones, el «lógico», en lugar de leer una publicación de un «intuitivo» sobre una cuestión que le interese, tratará de rehacer todo lo obtenido a su manera; y viceversa. De modo que una investigación psicológica del pensamiento matemático que no lleve consigo el examen de sujetos representativos de los dos grupos correría el riesgo de presentar como rasgos característicos de tal pensamiento cosas que, en realidad, sólo caractericen un grupo particular. Adviértase que, por otra parte, puede ocurrir que la «moda» matemática de una nación o de una época favorezca a uno de los dos grupos a costa del otro; y semejante situación puede dar lugar a un predominio de uno de ellos que lleve a conclusiones unilaterales.

La tipología de los matemáticos no ha recibido de los psicólogos la atención que merecería. Las investigaciones de Jaensch y de Althoff sobre este tema presentan, por desgracia, huellas de la funesta influencia de la ideología nazi; pese a lo cual, encontramos en su libro cierto número de observaciones que sería injusto no recoger. En particular, hacen ver de manera convincente que la sencilla dicotomía de Poincaré no proporciona una clasificación satisfactoria; lo cual es ya patente en las dificultades que encontraba Poincaré para clasificar a Hermite[1]:

> El señor Hermite, ... a quien acabo de citar, no puede clasificarse entre los geómetras que se valen de la intuición sensible, pero no es tampoco un lógico propiamente dicho: no oculta su repulsión por los procedimientos puramente deductivos que parten de lo general para llegar a lo particular.

[1] POINCARÉ, 1905, pág. 34 [vers. cast., pág. 32].

Estas dificultades se explican en cuanto se distingue entre la intuición exterior y la interior; en el § 30 volveremos sobre este punto.

§ 26. Las ideas de Poincaré, de Hadamard y de Polya.—La célebre *Enquête de «L'Enseignement Mathématique» sur la méthode de travail des mathématiciens* [«Encuesta de «L'Enseignement Mathématique» sobre el método de trabajo de los matemáticos»], publicada por H. Fehr con la colaboración de T. Flournoy y E. Claparède (París y Ginebra, 1908), si no suscitó, por lo menos estimuló e influyó, en virtud de sus resultados, en el desarrollo de las concepciones que me propongo ahora examinar. Pese a la colaboración de dos distinguidos psicólogos, esta encuesta adoptaba más el punto de vista del matemático que el del psicólogo, ya que consistía, ante todo, en un intento de determinar las condiciones que favorezcan el trabajo matemático; pero es innecesario decir que las preguntas planteadas y las respuestas que se les dieron ofrecen, sin embargo, un considerable interés para la psicología. Luego, la publicación de los resultados de la encuesta provocó, según parece, la conferencia de Henri Poincaré sobre «La invención matemática»[2]; y J. Hadamard[3] recogió posteriormente y profundizó las ideas de Poincaré. En cuanto a los trabajos de Polya, constituyen estudios independientes de los anteriores, pero no será inútil que nos ocupemos de ellos en el mismo contexto.

Partiendo de su experiencia personal, Poincaré distingue dos fases en el trabajo de invención matemática, fases que se encontrarían separadas por una fase inconsciente. Esta concepción está de acuerdo con una experiencia muy corriente acerca de lo que sucede cuando se resuelve un problema matemático suficientemente difícil: tras una serie de tentativas infructuosas llega la fatiga, y se ve uno obligado a abandonar la indagación; mas luego, tras un período de reposo, la solución se presenta repentinamente, sin esfuerzo alguno consciente y con claridad y certidumbre sorprendentes; de suerte que la segun-

---

2 POINCARÉ, 1909, págs. 43 y ss. [vers. cast., págs. 40 y ss.].
3 HADAMARD, 1945.

da fase del trabajo consciente no consiste sino en comprobar y formular lo que acabase de encontrarse.

A juicio de Poincaré, la fase transitoria que separa las dos de trabajo no es un período de reposo más que aparentemente: según él, habría, en realidad, una fase de trabajo inconsciente que conduciría, por fin, a la solución buscada.

Antes de discutir las ideas de Poincaré sobre la índole de este trabajo inconsciente, voy a permitirme citar algunos fenómenos que parecen confirmar su existencia. Ante todo diremos que, cuando acabamos de abandonar un problema, a menudo seguimos pensando en él, por más que sea involuntariamente; y entonces no empezamos otra vez desde el principio, como haríamos al decidirnos a atacar de nuevo un problema anteriormente abandonado, sino que tenemos la impresión de deslizarnos a pesar nuestro, e incluso de encontrarnos inmersos en un flujo de ideas ya en pleno movimiento y del cual no sería posible salir más que con cierto esfuerzo.

En segundo lugar, también sucede que, tras haber resuelto completamente un problema, se presente espontáneamente después una solución más breve o más elegante, o que nos demos de pronto con un resultado más completo o más general, y ello sin haberlo buscado conscientemente.

En cuanto a la naturaleza del trabajo inconsciente, Poincaré no acepta la hipótesis según la cual se llevaría a cabo por un yo subliminal que igualaría, o incluso sobrepasaría, al yo consciente en discernimiento, digitación o delicadeza: no quiere atribuir a aquel yo más que la capacidad de formar, merced a cierto automatismo, innumerables combinaciones de ideas, de entre las cuales sólo algunas penetrarían en el campo de la conciencia.

En cambio, insiste sobre la importancia de las dos fases de trabajo consciente: la fase inicial puede parecer absolutamente infructuosa, pero es la que «pone en marcha la máquina inconsciente»; y la fase final es igualmente indispensable, dado que es siempre forzoso comprobar la solución dada.

Las concepciones defendidas por Jacques Hadamard en su librito sobre la *Psicología de la invención*[4] están vinculadas, en

[4] HADAMARD, 1945.

general, a las ideas de Poincaré. Obsérvese que distingue cuatro fases, las de *preparación, incubación, iluminación* y *verificación* o comprobación, si bien la tercera no necesita contarse como fase separada. Hadamard insiste más que Poincaré en la existencia de tipos distintos de pensamiento matemático, y estudia bastante extensamente el papel de las palabras y de las imágenes.

Según Hadamard, las encuestas del tipo de la de *L'Ensignement Mathématique* tienen el inconveniente de que sólo rara vez provocan la respuesta de los matemáticos más competentes: la mayor parte de ellas proviene de profesionales de nivel medio. Ahora bien, a mi entender, esta objeción es menos grave de lo que supone Hadamard: quienes respondieron a la encuesta citada representaban un nivel cultural y de actividad matemática considerablemente superior al del hombre medio, y es poco probable que, desde el punto de vista psicológico, la forma de pensar de los matemáticos geniales se distinga apreciablemente de la de los buenos matemáticos que proporcionaron entonces la mayoría de las respuestas.

Mi opinión a este respecto queda confirmada, en cierto modo, por el hecho de que el mismo Hadamard advierta que, si bien entre el trabajo de un estudiante que trate de resolver un problema de álgebra o de geometría y un trabajo inventivo hay una diferencia de grado y de nivel, ambos son de análoga naturaleza; y, por otra parte, las observaciones de Poincaré sobre «las definiciones matemáticas y la enseñanza» [5] implican la misma idea. Si fuese de otro modo, la invención matemática, en sentido propio, constituiría un fenómeno tan extraordinario que sería mejor renunciar a analizarlo psicológicamente.

Acabo de dejar de lado la iluminación en tanto que fase separada. Hadamard la tiene por tal, pero entonces hubiera sido necesario tener en cuenta de igual modo el paso del primer trabajo consciente a la incubación: si se admite la hipótesis de Poincaré según la cual la fase de incubación es, en realidad, un período de trabajo inconsciente, la transición de lo cons-

[5] POINCARÉ, 1909, págs. 123 y ss. [vers. cit., págs. 97 y ss.].

ciente a lo inconsciente merecería que le dedicásemos particular atención. A este respecto caben dos hipótesis:

1) la «máquina inconsciente se pone en marcha» poco a poco durante la fase del primer trabajo consciente; y
2) dicha «máquina se pone en marcha» bruscamente, al interrumpir el trabajo consciente.

Pero la segunda hipótesis es poco probable. En efecto, según todos los datos con que contamos, la máquina inconsciente es capaz de sacar partido de los resultados del trabajo consciente; luego sería preciso que la interrupción de éste, o bien produjera una transmisión súbita de la información reunida, o estableciese un enlace entre el depósito que contenga tal información y la máquina inconsciente.

Parece mucho más plausible que la mentada máquina se ponga en movimiento durante el trabajo consciente y bajo su influencia. Cabe pensar en una especie de *inducción* o de *resonancia,* pero, según me parece, puede igualmente imaginarse un mecanismo análogo al de la *represión freudiana:* según la concepción de Poincaré, el trabajo consciente consiste en formar combinaciones de ideas y en rechazar las inútiles, luego podemos suponer que las combinaciones desdeñadas por la crítica consciente quedan reprimidas, y alimentan así la máquina inconsciente, que las sometería a nuevas operaciones; mientras continúe, el trabajo consciente nos absorbe enteramente la atención, de suerte que las nuevas combinaciones producidas por la máquina inconsciente apenas podrán «penetrar en el campo de la conciencia»; e incluso tras haberlo interrumpido, estas combinaciones sortean con mucha dificultad la censura de la crítica consciente; pero hay circunstancias en las que esta censura se relaja, tales como en los momentos de desgana, con el café puro, durante el servicio militar, las peripecias de un viaje, el estado semihipnagógico en Poincaré, los paseos a pie en el caso de Helmholz, con el tabaco, el té o el vino para otras personas; y entonces las combinaciones originadas por la máquina inconsciente serán capaces de llamarnos la atención consciente.

Voy a permitirme dedicar algunas palabras de mi experiencia personal en este campo. He observado que un problema matemático que me interese suficientemente provoca tres reacciones sucesivas, a saber:

1) una primera reacción instantánea;
2) una segunda reacción al cabo de algunos días, y
3) una tercera reacción tardía, sólo después de transcurrir algunos meses.

La primera reacción, que es completamente espontánea y no involucra esfuerzo consciente alguno, es relativamente eficaz. Así, en el caso de problemas sencillos suele dar lugar a una solución completa, con los menos sencillos lleva, ya sea a una solución parcial, ya a un método para encontrarla, y, en cualquier caso, a algo razonable.

La segunda reacción, que representa el resultado de un primer esfuerzo constante, es mucho menos eficaz: por lo general, no conduce a progreso alguno con respecto a la primera, cosa que no me anima a continuar la investigación.

La tercera reacción, harto tardía pero bastante eficaz, no la he descubierto más que a una edad relativamente avanzada. Como es natural, no se produce más que en los casos, poco numerosos, en que me interese especialmente el problema en cuestión; pero si se presenta uno de estos casos, a veces me permite conseguir lo que quería.

En una situación de este último tipo, la primera reacción me permitirá, como máximo, entrever el interés del problema y la posibilidad de resolverlo. La segunda reacción consiste luego en atacarlo con una energía considerable, cosa que da lugar a una serie de tentativas, algunas de las cuales parecen prometer un éxito rápido y completo; pero al repasar con un espíritu más crítico las notas tomadas me percato de que no he hecho ningún progreso, y pronto decido abandonar el problema.

No obstante lo cual, no dejo de hacer, de vez en cuando, a lo largo de un período de varios meses, pequeñas observaciones que acaban por constituir en conjunto un aparato que acaso

permita realizar un nuevo intento. Entonces puede suceder que, pese a todo, me decida a enfrentarme de nuevo con el problema; y ésta es la decisión que marca el comienzo de lo que en Poincaré y Hadamard era la primera fase: a partir de tal momento las cosas ocurren poco más o menos de acuerdo con la descripción ofrecida por estos hombres de ciencia.

A mi entender, estas observaciones personales permiten llegar a una conclusión importante: la fase de preparación descrita por Poincaré y Hadamard no puede suscitar un trabajo inconsciente fructífero más que si el trabajo consciente llevado a cabo durante tal primer período se realiza de modo suficientemente eficaz.

Pero esta observación parece justificar una segunda conclusión: la de que el trabajo inconsciente no tiene un carácter puramente automático, sino que también él está dirigido hacia una meta más o menos determinada, y la dirección que sigue le viene impuesta, precisamente, durante la fase de preparación.

Voy a señalar ahora otras dos consideraciones que nos impiden atribuir al trabajo inconsciente un carácter puramente automático. En primer lugar, de acuerdo con lo que hoy sabemos, habría que atribuir a una verdadera «máquina inconsciente» una capacidad y una velocidad astronómicas; y es bastante difícil creer en la existencia de semejante máquina.

En segundo término, según hemos visto, a veces nos ocurre que observamos conscientemente lo que sucede durante el período de incubación. La descripción de este fenómeno por Poincaré da la impresión de un flujo de ideas desprovisto de todo orden y de toda dirección; mas según mi propia experiencia, se trata, más bien, de un movimiento de la inteligencia semejante al pensar consciente, aunque más difuso y menos regular. (Adviértase que difícilmente podría franquear el umbral de la conciencia un proceso enteramente diferente de los fenómenos conscientes que nos son familiares, y que un flujo de ideas completamente desordenado apenas podría dar lugar, en sólo unas pocas horas, a los resultados que menciona Poincaré.)

De cualquier modo, nadie niega que lo conseguido por el trabajo inconsciente dependa en gran medida del trabajo consciente efectuado durante el período de preparación; hecho que

bastaría para hacer ver la importancia de las tentativas de Polya por asentar una *heurística matemática*[6].

A primera vista, la noción misma de una heurística presenta un carácter paradójico. Pues se pueden distinguir tres clases de problemas matemáticos, que son las siguientes:

1) los problemas cuya solución no exija otra cosa que la aplicación correcta de cierto procedimiento rutinario;
2) los problemas cuya solución pida que se apliquen inteligentemente determinados métodos más o menos corrientes, y
3) los problemas para los cuales los métodos corrientes no proporcionen solución alguna.

Ahora bien, para los de la clase 1) sobra toda heurística; con los de la clase 2), toda la necesaria se reduce al precepto de que se intenten aplicar de una manera inteligente los métodos disponibles; y los de la clase 3) se encuentran más allá de toda heurística.

Sin embargo, lo paradójico no es la noción de una heurística matemática, sino, por el contrario, el razonamiento que acabamos de exponer. Pues la misma clasificación de los problemas da lugar a cierto número de preceptos heurísticos; y voy a enunciar algunos de ellos. Ante un problema dado habrá que preguntarse, ante todo, si pertenece a la clase 1); si así sucede, bastará aplicar el método rutinario correspondiente.

En caso contrario, de nada serviría que intentásemos averiguar a cuál de las otras dos clases pertenece; pero, de todos modos, trataremos de aplicar en forma inteligente los métodos usuales; y para la selección de los que se hayan de ir aplicando sucesivamente nos guiaremos por los métodos heurísticos que tengamos a mano. Si antes de haber agotado los métodos disponibles se encuentra la solución buscada, es evidente que el problema pertenecía a la clase 2).

Si la aplicación de los métodos comunes no da resultado,

---

[6] POLYA, 1954 y 1957.

podremos concluir que el problema propuesto era de la clase 3). No es necesario decir que para los problemas de este tipo no hay heurística alguna especial; sin embargo, es recomendable que intentemos una vez más la aplicación de los métodos corrientes, no solamente para estar seguros de que no se haya pasado por alto ninguna solución posible, sino también con objeto de profundizar en las causas de su fallo. Sucede con frecuencia que de esta forma se encuentra la solución utilizando una variante de algún método conocido; pero si ello no ocurre, no podrá resolverse más que en virtud de una verdadera *invención matemática* como la que hemos estado describiendo.

§ 27. La búsqueda de un método al mismo tiempo heurístico y demostrativo: Descartes y el análisis de la Antigüedad.— En la práctica de la invención matemática ha existido siempre un curioso dualismo metodológico, señalado, entre otras cosas, por la tradicional oposición entre el *ars inveniendi* y el *ars disserendi.*

El *ars inveniendi* se compone de preceptos heurísticos que permiten encontrar la solución de ciertos problemas, pero que, en general, carecen de fuerza demostrativa. No es seguro *a priori* que observando tales preceptos encontremos al final la solución del problema que nos ocupe, ni tampoco lo es que, hallada la solución mediante una aplicación consistente de los preceptos, se trate de una solución correcta: siempre será preciso justificar *a posteriori*, por medio de una demostración, la solución encontrada.

El *ars disserendi*, por el contrario, nos proporciona principios que nos permitan juzgar *a posteriori* acerca del carácter concluyente de cualquier demostración propuesta y, a la vez, de la justeza de la solución que pretendiese justificar. Sin embargo, tales principios no pueden aplicarse más que *a posteriori*, y, por tanto, no pueden ayudarnos a encontrar la solución de un problema cualquiera que tengamos planteado, ni siquiera a montar la demostración que justifique una solución que hayamos encontrado.

Con todo ello, en algunos casos especiales disponemos de

un procedimiento que es al mismo tiempo heurístico y demostrativo. El caso más antiguo y —según las concepciones contemporáneas— más fundamental es el del *cálculo numérico:* pues el algoritmo que nos permite resolver el problema de determinar el producto de 137 por 269 proporciona a la vez la demostración justificativa de la solución obtenida. (El hecho de que seamos capaces de cometer errores al aplicar el algoritmo no constituye una objeción válida; pues si el resultado del cálculo es erróneo es que su demostración es falaz.)

La *silogística* aristotélica constituye un segundo ejemplo de método a la vez heurístico y demostrativo. Observemos que el nombre mismo de este método demuestra que su analogía con el cálculo numérico no se les había ocultado a los pensadores helenos; y si, pese a ello, estos dos casos apenas han hecho que se fije en ellos la atención de filósofos y matemáticos, tal cosa se debe a que, por una parte, se consideraba a la silogística como exterior a las matemáticas, mientras que el cálculo numérico había degenerado hasta tal punto en mera rutina, ya para Platón y Aristóteles, que se lo miraba, por así decirlo, como submatemático.

Fue Descartes quien subrayó el carácter juntamente heurístico y demostrativo del *método algébrico,* y quien comprendió toda la importancia de esta observación. Como segundo ejemplo de este método cita el famoso *análisis de la Antigüedad;* es cierto que se trata de una idea sumamente problemática y posiblemente apócrifa, pero eso no le impidió asentar la *geometría analítica,* que constituye la síntesis del método algébrico con el análisis geométrico de la Antigüedad.

Conviene darse cuenta, sin embargo, de que los métodos citados no realizan el ideal más que de una manera imperfecta. Pues nos permiten encontrar la solución de gran cantidad de problemas que se plantean en ciertos dominios específicos, y cuando al aplicarlos se llega a una solución, se tiene, al mismo tiempo, una justificación completa de ella; pero, con todo, no permiten resolver todo problema que se plantee en su campo de aplicación; y ni siquiera Descartes intentó formular las condiciones de aplicación de tales métodos.

En este contexto tiene interés ver cómo Descartes vacila

ante proyectos más ambiciosos; muy especialmente, al estudiar el proyecto de una *lengua universal*[7] afirma que

si alguien hubiera explicado perfectamente cuáles son las ideas simples que se encuentran en la imaginación de los hombres, de las que se compone todo lo que piensan, y si todo el mundo admitiese tal caso, me atrevería a esperar a continuación una lengua universal sumamente fácil de aprender, de pronunciar y de escribir, y, cosa que es lo principal, que ayudase al juicio, al representarle tan distintamente todas las cosas que le fuese casi imposible equivocarse; en lugar de que, como sucede enteramente al revés, las palabras que tenemos casi no tienen más que significados confusos, a los cuales se ha acostumbrado el espíritu de los hombres desde hace largo tiempo, y ello es causa de que no entienda casi nada perfectamente. Ahora bien, yo tengo por posible esta lengua, y que se puede encontrar la ciencia de la que depende, por medio de la cual podrían los campesinos juzgar mejor de la verdad de las cosas que como lo hacen actualmente los filósofos. Pero no esperemos verla jamás usada: eso presupone grandes cambios en el orden de las cosas, y haría falta que todo el mundo no fuese sino un paraíso terrestre, lo cual no se puede proponer más que en el país de las novelas.

§ 28. **Leibniz y el problema de la decisión *.**—Leibniz[8] hace la observación que sigue acerca de la carta de Descartes que acabo de citar:

Sin embargo, aunque esta lengua dependa de la verdadera filosofía, no depende de su perfección. Es decir, que se puede establecer la lengua aunque la filosofía no sea perfecta, y a medida que crezca la ciencia de los hombres crecerá asimismo su filosofía. Mientras tanto, será de un auxilio maravilloso, tanto para servirse de lo que ya sepamos, como para ver lo que nos falte y para inventar los medios de llegar a ello, pero, sobre todo, para exterminar las controversias en los asuntos que dependen del raciocinio; pues entonces razonar y calcular será la misma cosa.

Este leibniziano *postulado de la reducción del razonamiento al cálculo* admite tres interpretaciones, de una «fuerza lógica» sumamente diferente. Según la interpretación más débil, im-

---

[7] DESCARTES, 1842, págs. 524-5.

* Por conformarnos al uso establecido —que, sin embargo, habría que tener el valor de romper— aceptemos este nombre de «decisión», que se presta a toda clase de ambigüedades y confusiones, dado su empleo en forma absolutamente apropiada e ineludible en la «teoría de la decisión (humana)» (véase un ejemplo de posible confusión en el § 39, texto correspondiente a nuestra nota a pie de página). En lógica habría que decir algo así como «problema de la averiguación», o de la «averiguabilidad» (o incluso, si se quiere, de la aclaración o la aclarabilidad): expresiones todas que indican mucho mejor de qué se trata, pues en tal problema no entran voluntariedad ni decisión algunas por parte del lógico o matemático. (*N. del T.*)

[8] COUTURAT, 1903, pág. 28.

plica la existencia (o la construcción) de un simbolismo que permita representar todo razonamiento lógico de tal forma que se pueda comprobar su carácter concluyente de una manera análoga a la comprobación de un cálculo numérico. De acuerdo con la segunda interpretación, implica la existencia de un procedimiento que permita obtener la solución de ciertos problemas, dando al mismo tiempo la demostración justificativa de tal solución.

Según la interpretación más fuerte, el postulado de Leibniz implica la existencia de un procedimiento que permita resolver *todo* problema relativo a «los asuntos que dependan del raciocinio» y que, a la vez, nos ofrezca la demostración de la justeza de la solución encontrada.

Ahora bien, no cabe la menor duda de que la única interpretación que concuerda con las intenciones de Leibniz es la más fuerte. Lo cual se infiere, entre otras cosas, del hecho de que el método algébrico no sea para él un *ars inveniendi* porque no permite resolver todo el problema del álgebra.

Así pues, el postulado de Leibniz pide una solución general de lo que hoy llamamos el *problema de la decisión:* sólo una solución general de este problema permitiría realizar en su perfección el ideal de un método a la vez heurístico y demostrativo. Ahora bien, dado que, de acuerdo con [lo hallado por] Gödel, el problema de la decisión no admite una solución general efectiva, tenemos que renunciar a toda esperanza de realizar semejante ideal, y hemos de aceptar el dualismo metodológico que he señalado al comienzo del § 27.

§ 29. Conservación de los niveles inferiores: el método de Arquímedes.—El progreso científico se manifiesta en las matemáticas de dos formas muy distintas: por una parte, se tienen los descubrimientos que nos otorgan la posesión de nuevos recursos técnicos con los que poder atacar problemas antes inaccesibles, y, por otra, hay otros que contribuyen, sobre todo, a hacer más profunda nuestra comprensión teórica, y que hacen posible efectuar demostraciones más completas y rigurosas. El descubrimiento del cálculo infinitesimal constituye un buen ejemplo de progreso en una dirección puramente técnica: tal descubrimiento no reforzó la estructura teorética de las mate-

máticas, e incluso afectó al nivel de rigor que había adquirido ya la geometría griega.

Puede citarse la *teoría de los números naturales*, de Dedekind, como un hermoso ejemplo de progreso puramente teorético. Esta teoría apenas amplía el conjunto de nuestros recursos técnicos, pero, en cambio, nos permite profundizar considerablemente en la comprensión de los fundamentos de la aritmética.

Observemos, sin embargo, que en esta apreciación del cálculo infinitesimal y de la teoría de Dedekind no he tenido en cuenta más que su influencia respectiva a corto plazo. En lo que al primero se refiere, los matemáticos fueron poco a poco sintiéndose a disgusto con los raciocinios característicos del análisis del siglo XVII, y terminaron por hacer enérgicos esfuerzos para reedificar las matemáticas sobre unas bases más sólidas; y en último análisis, la teoría dedekindiana está vinculada a este movimiento. Por otra parte, tanto esta teoría como otras de un carácter comparable inauguraron una reforma de las matemáticas que ha resultado ser sumamente útil incluso desde el punto de vista de las aplicaciones a las ciencias naturales y a la técnica; de modo que, a fin de cuentas, se ha producido un progreso considerable tanto en el plano teorético como en el dominio de las aplicaciones.

El desarrollo que acabo de resumir no es único. Ya las matemáticas griegas pasaron por una «*crisis de fundamentos*», debida a las paradojas de Zenón y al descubrimiento de las proporciones irracionales, crisis que sobrepasaron gracias a los esfuerzos de Eudoxo de Cnido: la teoría de las proporciones, de Eudoxo, permitió substituir el método atomista aplicado por los primeros geómetras griegos por el *método exhaustivo*, que es el equivalente antiguo de los rigurosos métodos aplicados por los matemáticos contemporáneos.

Lo que interesa, desde el punto de vista psicológico, es que el método atomista, pese a las antinomias inherentes a él, no ha sido nunca abandonado.

En este orden de ideas es preciso mencionar ante todo la aplicación de este método por autores no matemáticos: citaremos, a título de ejemplo, las ideas de Giordano Bruno.

Luego es menester que mencionemos el renacimiento del atomismo matemático que comenzó por Cavalieri, y que influyó notablemente en el primer desarrollo del cálculo infinitesimal.

Observemos, por fin, que en la práctica de la investigación matemática, e igualmente en la enseñanza, se recurre constantemente al método atomista, incluso en nuestros días. Tenemos un ejemplo sorprendente de tal práctica en el *Método* de Arquímedes, descubierto por Heiberg en 1906: en el prefacio, Arquímedes hace hincapié en la diferencia entre el método demostrativo que había aplicado en sus otros trabajos y el método heurístico que se proponía revelar allí, y que le permitió descubrir resultados célebres, cuya demostración propiamente dicha no dio más que tras estar en posesión suya.

Grünbaum[9] hace notar que la teoría cantoriana de conjuntos permite rehabilitar el método atomista; sin embargo, me parece que esta afirmación no está justificada. Mas para explicar mis objeciones será preciso explicitar —en la medida de lo posible— los principios de este método, que son:

I cualquier magnitud continua (línea, superficie o sólido) se compone de átomos que son magnitudes del mismo género, de modo que cabe obtener la medida (longitud, área, volumen) de la magnitud continua totalizando las medidas de los átomos que contenga;

II al efectuar dicha totalización se supone tácitamente que el número de átomos es finito, por más que muy elevado, de suerte que bastará «contar» los átomos, y

III evitamos, sin embargo, fijar el número de éstos.

Los principios I y II son los que explican la fecundidad del método atomista; en cuanto al III, sólo sirve para eludir las antinomias. Ahora bien, es evidente que tanto el principio I como el II son incompatibles con los principios de la teoría de conjuntos.

El hecho de que los matemáticos continúen utilizando este método plantea, indudablemente, dos preguntas que tienen gran

9 GRÜNBAUM, 1953.

interés para la psicología del pensamiento matemático: 1) ¿por qué persisten los matemáticos, que disponen de métodos irreprochables, en valerse del método atomista?, y 2) ¿cómo se las arreglan para no obtener más que los resultados correctos derivados de este método?

En el fondo, ambas preguntas no representan más que un aspecto especial de otra más general: ¿qué explicación psicológica tiene la aceptación por los matemáticos del dualismo metodológico que hemos caracterizado en el § 27?

§ 30. ¿Qué es el pensamiento original: creación o invención, construcción o descubrimiento? La respuesta del platonismo: Frege, Cantor y Hermite.—Para contestar a esta pregunta es necesario tener en cuenta la influencia del platonismo en el desarrollo de las matemáticas.

Según el platonismo, las matemáticas se refieren a objetos que se encuentran más allá del mundo material y, por consiguiente, inaccesibles a la percepción sensorial. De ahí que no puedan fundarse en datos empíricos, y hayan de desarrollarse exclusivamente por el raciocinio; así pues, el método deductivo sería el único que convendría a las ciencias matemáticas, y la ausencia de toda información que pudiera corregir un razonamiento falaz nos obliga a no admitir en ellas más que demostraciones que cumplan los preceptos del rigor lógico más exigente.

Dado que sabemos poquísimo de las matemáticas anteriores a Platón, ignoramos si éste las describía tal y como las conoció, o si los matemáticos se acomodaron a los preceptos que él enunció; pero es incontestable que los escritos clásicos de los grandes matemáticos griegos que han llegado hasta nosotros responden fielmente a las concepciones de Platón, y que la influencia de otras concepciones sobre el desarrollo de las matemáticas griegas fue despreciable: en efecto, los escépticos y epicúreos, más que recomendar a los matemáticos método alguno nuevo, se limitaron a combatir estas ciencias como tales.

A partir del siglo XVII los filósofos han creado doctrinas nuevas referentes a la naturaleza y el método propios de las

ciencias matemáticas: intuicionismo, empirismo, pragmatismo, nominalismo y otras varias. Sin embargo, tales doctrinas apenas han ejercido influencia alguna en los matemáticos, que han terminado por conformarse con mayor fidelidad que nunca a la metodología tradicional; y es significativo que protagonistas de este movimiento, tales como Cantor y Frege, hayan invocado a este respecto la filosofía de Platón (tendencia que ya se manifestaba en Bolzano). Encontramos en Hermite una actitud sumamente curiosa, según la manera en que nos la describe Poincaré[10].

Jamás he conocido a matemático alguno más realista, en el sentido platónico, que Hermite; y, sin embargo, tengo que confesar que no he encontrado ninguno más refractario al cantorismo. Hay en ello una contradicción aparente, tanto más cuanto que repetía de buena gana: soy anticantoriano *porque* soy realista. Reprochaba a Cantor que creaba objetos, en lugar de contentarse con descubrirlos; debido, sin duda, a sus convicciones religiosas, le parecía una especie de impiedad el querer penetrar por el propio pie en un dominio que sólo Dios puede abarcar, y no esperar a que nos revele uno por uno los misterios. Así, comparaba las ciencias matemáticas a las naturales: un naturalista que hubiese intentado adivinar el secreto de Dios, en lugar de consultar la experiencia, no sólo le habría parecido presuntuoso, sino irrespetuoso para con la majestad divina; y los cantorianos le parecían querer obrar del mismo modo en matemáticas. Esta es la razón por la que, realista en teoría, en la práctica era idealista: hay una realidad que conocer, independiente de nosotros; pero todo lo que podemos conocer de ella depende de nosotros, y no es más que un devenir, una especie de estratificación de conquistas sucesivas; el resto es real, pero eternamente incognoscible.

La descripción que nos da Poincaré[11] del comportamiento exterior de Hermite es una prueba palpable de que su platonismo no se reducía, con todo, a una actitud filosófica, sino que correspondía a una profunda realidad psíquica: tras haber observado que el «geómetra» se caracteriza por el hecho de que

Sin dejar de hablar, está siempre en acción: unas veces parece enzarzado con algún enemigo exterior, otras dibuja las figuras que estudia con un gesto de la mano; es evidente que ve y que quiere pintar, y por ello llama en su auxilio al gesto...,

Continúa Poincaré:

Con el señor Hermite ocurre todo lo contrario: sus ojos parecen

---

10 Poincaré, 1913, págs. 160-1.
11 Poincaré, 1905, págs. 14 y 32 [vers. cit., págs. 21 y 31].

huir el contacto del mundo: no fuera, sino dentro, es donde busca la visión de la verdad.

... ...

Cuando hablaba uno con el señor Hermite, nunca evocaba ninguna imagen sensible; y, sin embargo, uno se percataba en seguida de que las entidades más abstractas eran para él como seres vivos. No los veía, pero notaba que no constituyen algo montado artificialmente, y que tienen cierto principio de unidad interna.

El hecho de que en Hermite (y, sin duda alguna, en otras muchas personas) el platonismo traduzca una realidad psíquica no demuestra, evidentemente, que esta doctrina —ni siquiera la concepción platónica de las matemáticas— encierre en sí la verdad. Pues el simple hecho de que al resultado de un trabajo original en el campo de la investigación matemática se le llame tanto *creación* o *invención* como *construcción* o *descubrimiento,* revela toda la multiformidad de la experiencia matemática.

A mi entender, sólo una tipología verdaderamente científica del pensamiento matemático, asentada mediante métodos psicológicos perfectamente probados, podrá proporcionarnos una imagen suficientemente matizada de esta experiencia bajo todas sus formas, tan divergentes. Y mientras falte tal tipología seguirá siendo enormemente difícil llegar a una interpretación más o menos coherente de los datos introspectivos acerca del carácter propio del pensamiento matemático que únicamente los matemáticos nos pueden ofrecer.

5 ESTRUCTURAS INTUITIVAS Y MATEMATICAS FORMALIZADAS

§ 31. La intuición espacial: Kant, Helmholzt, F. Klein, Nicod, Whitehead y Tarski.—Hemos comprobado que existe una especie de «armonía preestablecida» entre el pensamiento matemático puro, el método deductivo y el platonismo: la alianza entre los tres es tan estable que es difícil pensar que no constituya sino el resultado de una constelación histórica fortuita.

Sin embargo, los tres elementos que acabo de mencionar no son los únicos factores que han determinado el desarrollo de las matemáticas: los métodos heurísticos no han cesado de valer a los matemáticos, por más que casi siempre queden eliminados o disimulados cuando se presentan los resultados definitivos de una investigación; y apenas puede dudarse de que el método heurístico que se aplica más frecuentemente es la apelación a la intuición espacial.

Podría pensarse que el desarrollo de las matemáticas abstractas, que se ocupan preferentemente de objetos inaccesibles a la intuición espacial, ha acabado con todo recurso a ésta. Mas si bien es patente que en lo que se refiere a estas matemáticas nadie atribuiría la menor fuerza demostrativa a la apelación a la intuición especial, ello no impide, sin embargo, que se recurra a menudo a ella, incluso en los estudios más abstractos; por lo cual, hasta en los tratados más estrictos, las figuras no faltan del todo casi nunca.

Otra consideración que puede dar lugar a sospechas relativas al papel de la intuición espacial es la siguiente. Las demos-

traciones que se encuentran, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides contienen, casi sin excepción, lagunas más o menos graves; nadie duda de que los geómetras antiguos las colmaban apelando con mayor o menor frecuencia, pero siempre tácitamente, a la intuición espacial; ahora bien, esta práctica no dio lugar jamás a la admisión de teoremas falsos. ¿No habrá que concluir, por una parte, que la intuición espacial constituye para la matemática pura una fuente de información digna de confianza y, por otra, que los matemáticos contemporáneos, al negarse a utilizar tal fuente, o bien se privan de informaciones indispensables, o las aprovechan sin saberlo?

Según la doctrina auténtica de Kant, tal y como la hemos analizado en el capítulo 1, esta segunda suposición sería la correcta: sólo aparentemente se habría desarrollado la geometría por deducción de teoremas siempre nuevos a partir de unos axiomas planteados de una vez para siempre; lo que en realidad ocurriría es que en la intuición pura del espacio se construirían figuras cada vez más complejas, cuyas propiedades se enunciarían después en forma de teoremas. Sin embargo, ya hemos comprobado que esta doctrina no es correcta, y que ciertos rasgos particulares de las demostraciones matemáticas que quiso explicar Kant cuadran perfectamente con las concepciones que hoy tenemos, más profundas, acerca de los fundamentos del método deductivo. Por consiguiente, el papel de la intuición espacial puede quedar restringido al de sugerir o justificar la elección de los axiomas geométricos; concepción que ha encontrado un asentimiento casi unánime, por más que casi siempre se atribuya retrospectivamente a Kant.

Pese a lo cual, sigue siendo verdad que en el desarrollo histórico de la geometría la intuición espacial ha desempeñado un papel mucho mayor que éste, y que es preciso, por tanto, explicar el curioso hecho de que la apelación a la intuición haya dado lugar a teoremas cuya solidez sólo mucho más tarde ha quedado confirmada, por deducción formal.

En unos estudios que se han hecho célebres (y con todo derecho), Helmholz[1] examinó por vez primera la elaboración de unas concepciones más adecuadas acerca del papel de la

[1] HELMHOLZ, 1923.

intuición espacial en las matemáticas. Recordemos que para nosotros hay dos problemas, a saber:

1) determinar el papel que pueda y deba tener la intuición espacial en la geometría, y
2) explicar que, de hecho, esta intuición desempeñe en ocasiones un papel mucho más importante sin que se llegue inmediatamente a teoremas falsos.

Según Helmholz, lo que solemos llamar intuición espacial está constituido por elementos heterogéneos: los elementos fundamentales son innatos, y nos permiten organizar espontáneamente el conjunto de nuestra experiencia espacial; pero en tal organización intervienen ciertos elementos complementarios, que forman luego un solo cuerpo con los innatos y participan de la completa evidencia de éstos.

La axiomática euclídea traduce al mismo tiempo —por decirlo así— los elementos innatos y los empíricos. En cambio, una buena axiomática no debería traducir más que los innatos; y semejante sistema de axiomas no determinaría ya de manera categórica la estructura del espacio: esto es, habría varias estructuras de éste que serían compatibles con el conjunto de elementos innatos.

Son los axiomas complementarios, fundados en la experiencia, los que permiten luego determinar la estructura especial que esté de acuerdo con la realidad.

Esta concepción de Helmholz, sin duda alguna muy acertada en líneas generales, se ha visto sometida a ciertos retoques. Así, Poincaré ha hecho notar que, en principio, la experiencia no puede determinar jamás en forma definitiva la elección de una estructura especial del espacio: tal elección viene determinada en parte por consideraciones de conveniencia.

Tendría gran interés establecer una axiomática de la geometría en la que se pudieran ver las aportaciones respectivas de los elementos innatos, los empíricos y las convenciones. Sin embargo, no es fácil, en modo alguno, edificar un sistema de esta índole: ya M. Pasch y F. Klein observaron que en las distintas axiomatizaciones intervienen conceptos que no son accesibles ni a la intuición pura (caracterizada por los elemen-

tos innatos exclusivamente) ni a la empírica (que se desarrolla a partir de aquélla por incorporación de elementos empíricos); pues la intuición ingenua, que abarca a las dos anteriores, tiene un *carácter global* que impide atribuirle la capacidad de manejar los conceptos de punto, línea o superficie en su sentido propiamente geométrico.

Existe la costumbre de afirmar que estos conceptos se adquieren a partir de nociones intuitivas propiamente dichas merced a una abstracción o una idealización. Mas por el momento no importa profundizar en el proceso de obtención de tales conceptos: lo que importa es que se suela suponer que antes de ponerse a construir una axiomática ya se han efectuado procesos de esta índole; pues la axiomática incluirá, entonces, como conceptos primitivos, unos conceptos no accesibles a la intuición ingenua, con lo cual los axiomas en cuyo enunciado entren poseerán asimismo un carácter no intuitivo.

Con objeto de obviar este defecto será preciso que no aceptemos como conceptos primitivos más que los que presenten un carácter lo más primitivo posible: los enunciados que traduzcan los elementos innatos no han de conllevar más que conceptos accesibles a la intuición pura; en el enunciado de los axiomas que traduzcan los elementos empíricos pueden estar incluidos conceptos accesibles a la intuición empírica, pero no a la pura; y, por fin, se recurrirá a elementos convencionales para colmar las lagunas que subsistan.

J. Wellstein (1905), A. N. Whitehead (1919 y 1920), J. Nicod (1924) y A. Tarski (1927) [incluido, formando el trabajo II, en Tarski, 1956], han elaborado axiomatizaciones de este género. Voy a examinar, como ejemplo, el sistema de Tarski.

El «universo del discurso» se compondrá de todos los *cuerpos sólidos* del espacio euclídeo, a los que se tratará como individuos, y no como conjuntos de puntos. En cuanto a los conceptos primitivos, serán los siguientes: 1) la *relación de parte a todo* en cuanto aplicable a cuerpos sólidos, y 2) el *concepto de esfera* como sólido particular.

Tarski hace ver que estos dos conceptos bastan para definir la *relación entre dos esferas concéntricas*. Esto supuesto, define el *punto geométrico* como la clase de todas las esferas concén-

tricas a una esfera dada; y luego define la relación, *I*, que media entre tres puntos, *a*, *b* y *c*, cuando *a equidiste de b y c*. Ahora bien, según un resultado obtenido por M. Pieri (1908), basta el concepto de *I* para definir todos los demás conceptos de la geometría euclídea; por consiguiente, al ser definible *I*, a su vez, por medio de los conceptos primitivos 1) y 2), se sigue que estos últimos permiten asimismo definir todos los conceptos de la estereometría euclídea.

En cuanto a los axiomas, es evidente que en primer lugar tenemos necesidad de algunos que caractericen la relación entre parte y todo, por ejemplo, así:

I. *Si X es una parte de Y y si Y es una parte de Z, X será también una parte de Z.*

El enunciado de los axiomas propiamente geométricos se realiza de una forma bastante curiosa: partimos, por ejemplo, del sistema de axiomas dado por Pieri, en el que el único concepto primitivo es el de *I;* y como tanto el concepto de punto como este otro pueden definirse mediante los conceptos primitivos 1) y 2) de Tarski, podemos formular de nuevo los axiomas de Pieri reemplazando en ellos tales conceptos por su *definiens* correspondiente. Entonces, se aceptan en bloque los axiomas pierianos, si bien reformulados como hemos dicho.

Difícilmente podrá ponerse en duda el carácter elemental de la axiomatización así obtenida: evidentemente, la relación entre parte y todo, en cuanto aplicable a los cuerpos sólidos, se encuentra al alcance de la intuición pura, y la adjunción del concepto de esfera representa en forma muy feliz las precisiones que aporta la intuición empírica; en cuanto a los axiomas que caracterizan la relación entre parte y todo, son también sumamente elementales.

Sin embargo, los axiomas propiamente geométricos, que enunciamos exclusivamente por medio de los conceptos primitivos 1) y 2), no son elementales más que «en principio»; y en una exposición «normal» de la estereometría euclídea tales axiomas ofrecerían, más bien, el aspecto de una colección de teoremas abstrusos y alquitarados relativos a esferas, clases de esferas, etc.

Ello es desconcertante, pero, a mi juicio, no tiene por qué sorprendernos. Pues el desarrollo deductivo de la geometría hace necesario que intervengan elementos no intuitivos; acaso es que, como decía Pasch, «el pensamiento matemático avanza en dirección contraria a la naturaleza humana»; mas en todo caso, la historia misma nos hace ver, en las paradojas de Zenón y en las dificultades relativas a la teoría de las paralelas, que los griegos no lograron edificar la geometría como ciencia deductiva más que introduciendo elementos de índole manifiestamente artificial, desprovistos de fundamento tanto en la intuición pura como en la empírica. Mientras no se ocupe uno de la geometría sino para encontrar la solución de unos problemas prácticos, cabrá mantenerse dentro de los límites impuestos a las concepciones tomadas de la intuición pura o la empírica: solamente cuando se hace un intento de transformar semejante geometría práctica en una disciplina teórica y deductiva se observan las lagunas inherentes a nuestras concepciones intuitivas, y se siente la necesidad de colmarlos introduciendo ideas cuyo origen se encuentra en la reflexión teorética, y que, por consiguiente, poseen un carácter «artificial».

Así pues, toda axiomatización idónea de la geometría euclídea tiene que incluir ciertos principios no intuitivos; pero nos queda, con todo, la posibilidad de «localizarlos» de forma más o menos conveniente. En el sistema de Tarski, los conceptos primitivos y parte de los axiomas son de índole sumamente intuitiva, y las concepciones no intuitivas se confinan a los axiomas propiamente geométricos. Por el contrario, en el sistema de Hilbert (que constituye algo así como una versión modernizada del de Euclides) se admiten como conceptos primitivos unas nociones no intuitivas, como son las de *punto* y *recta,* lo cual permite adoptar unos axiomas que, en su mayor parte, tienen un carácter altamente intuitivo: únicamente el de las paralelas y los de continuidad son dudosos en cuanto a intuitividad.

§ 32. La intuición temporal: Kant, Bergson, Brouwer y De Groot.—En Kant, el espacio y el tiempo ocupaban, en principio, posiciones equivalentes: el espacio, forma intuitiva del senti-

do externo, constituiría a la vez el fundamento de la geometría pura, mientras que el tiempo, forma intuitiva del sentido interno, debería proporcionarnos, análogamente, el fundamento de la aritmética. Sin embargo, no es posible dudar de que Kant dedicó mucha mayor atención al estudio del espacio en sus relaciones con la geometría que a reflexiones análogas sobre el tiempo; de suerte que, tanto para él como para sus contemporáneos, la geometría ocupaba el primer puesto entre las distintas ramas de las matemáticas, mientras que la aritmética se encontraba en una posición subordinada.

Durante el siglo XIX la situación cambió profundamente. El descubrimiento de las geometrías no euclídeas iba a quebrantar las relaciones entre la geometría pura y la intuición espacial, y, por otra parte, el desarrollo de los métodos analíticos en geometría y la tendencia hacia la aritmetización del análisis contribuyeron a otorgar a la aritmética un puesto cada vez más central; además, el hecho de haber resultado problemáticas las relaciones entre la geometría pura y la intuición espacial, así como el desarrollo de los métodos abstractos y no constructivos en análisis, difícilmente podían alentar a los matemáticos a profundizar en algunas indicaciones dadas por Kant acerca de las relaciones entre la aritmética y la intuición temporal.

En la filosofía la situación no era favorable para tentativas en esta dirección: las discusiones provocadas por el descubrimiento de las geometrías no euclídeas habían acabado por apartar a la mayoría de los filósofos de las ciencias matemáticas; y la escuela neokantiana de Marburgo, que seguía interesándose por ellas, se inclinaba más bien a adoptar una postura logicista en lo que se refiere al problema de los fundamentos.

Bergson, que es uno de los escasos filósofos que han dedicado profundas reflexiones a los problemas de la intuición temporal, no admitía más que una relación indirecta entre la intuición del tiempo y la aritmética; según él, semejante relación no puede establecerse más que por intermedio de una especialización del tiempo vivido, cosa que, evidentemente, constituirá una desfiguración.

Fue Brouwer quien postuló la existencia de una relación muy estrecha entre la intuición temporal y las matemáticas pu-

ras, todo ello dentro de su programa[2] de refundición intuicionista de las matemáticas modernas. Este autor acepta las geometrías no euclídeas con iguales títulos que la euclídea, y admite asimismo la autonomía completa de la geometría con respecto a la intuición espacial y a la aplicación de los métodos analíticos en geometría; por otra parte, se opone vigorosamente a las tendencias formalistas, logicistas, cantorianas y abstractas que dominan el desarrollo contemporáneo de las matemáticas, ya que quiere, por el contrario, fundar éstas sobre una base intuitiva, y, en particular, sobre la intuición temporal: pues esta intuición nos permite, en primer lugar, construir la sucesión infinita de los números naturales, y luego, el continuo de los números reales. Posteriormente, Brouwer se ha apartado algo de su programa inicial, en el sentido de que ha sustituido la intuición temporal por la «*intuición de la multi-unidad*»; sin embargo, esta revisión no ha afectado ni a su crítica de las matemáticas modernas ni a su manera de construir los números naturales y el continuo.

Obsérvese que, en definitiva, incluso Brouwer ha abandonado el método tradicional de asentar la teoría del continuo, partiendo simplemente de axiomas que constituyan —o que se suponga constituyen— la descripción de cierto continuo dado por la intuición. Pues la teoría intuicionista del continuo describe uno construido a partir de unos datos intuitivos de carácter mucho más elemental (datos que se toman de la intuición de la multi-unidad); procedimiento que adoptan tanto Brouwer como sus adversarios, y que resulta obligado, ya que la estructura de los continuos intuitivos es demasiado difusa como para permitir una descripción que pudiera servir como sistema de axiomas.

Lo difuso de la estructura del continuo espacial intuitivo se manifiesta en la necesidad de recurrir a los elementos artificiales estudiados en el § 31; en cuanto al continuo temporal intuitivo, basta recordar las exposiciones de Bergson al respecto.

En este contexto ofrece interés un breve examen de las ob-

---

[2] BROUWER, 1907.

servaciones de J. de Groot[3]. Este autor presupone, en cuanto datos fenoménicos, unas experiencias, B, que —diciéndolo con la terminología cotidiana— posean cierta duración; es natural que sólo se admitan experiencias *conexas,* esto es, desprovistas de toda interrupción temporal consciente; ahora bien, las partes de cualquier experiencia, B, admiten un *orden parcial*: si B_1 y B_2 son partes de B, puede suceder que B_1 se sienta como precedente a B_2, que sea ésta la que se sienta como precedente a B_1 o que no ocurra ninguna de las dos cosas.

La intersección de dos experiencias de este tipo, B y B', o bien será vacía o constituirá la experiencia B''; y si no es vacía caben aún cuatro posibilidades: que $B'' = B'$ forme parte de B, que $B'' = B$ forme parte de B', que $B - B'$ preceda a B'' y B'' preceda a $B' - B$, o que $B' - B$ preceda a B'' y B'' preceda a $B - B'$.

Estos principios se toman de una fenomenología de la percepción temporal, y las matemáticas abstractas proporcionan los medios de establecer el orden temporal en el sentido corriente. En efecto, partiendo del orden parcial que se presupone en el conjunto de las experiencias y de sus partes, cabe construir cierta relación de orden entre ciertos subconjuntos de este conjunto: por ejemplo, si no se tienen en cuenta más que los subconjuntos del conjunto de todas las partes de una y la misma experiencia, el orden obtenido es un *orden lineal;* pero si lo que se toma en consideración son subconjuntos de un conjunto más amplio, los principios que hemos presupuesto no garantizan la obtención de este tipo de orden; y si postulamos que el orden que resulte de la construcción descrita ha de ser lineal, no es necesario que sea un orden continuo, ya que existen otras muchas posibilidades.

Ahora podemos volver a la cuestión del recurso a la intuición espacial o la temporal. Este recurso es posible de hecho, pero no de derecho, mientras no se refiera sino a propiedades globales de un continuo intuitivo: por ejemplo, las propiedades globales del continuo espacial se vuelven a encontrar en el espacio euclídeo lo mismo que en los espacios no euclídeos, luego tales propiedades están expresadas, de manera explícita

[3] De Groot, 1952.

o implícita, por los axiomas de los distintos sistemas de geometría euclídea o no euclídea. Por ello, para aplicar una de estas propiedades en una demostración geométrica se puede, o bien apelar a ciertos axiomas de la geometría que sea o simplemente consultar la intuición espacial.

Es obvio que en la práctica de la investigación matemática se contentará uno con esto último: la experiencia del geómetra le permite, por lo general, evitar las trampas que, pese a todo, son inherentes a semejante proceder (ya que no siempre se sabe si realmente entra en juego una propiedad global); en último término, este procedimiento posee un carácter heurístico, y no demostrativo, de suerte que es menester en cualquier caso asentar el resultado obtenido por medio de una demostración rigurosa.

§ 33. La intuición finitista según Hilbert y la intuición del infinito.—Supongamos ahora que se haya asentado rigurosamente un teorema determinado de la geometría euclídea; en tal caso dispondremos de una sucesión finita de enunciados geométricos que 1) comenzará por cierto número de axiomas y de teoremas previos, en tanto que 2) cada uno de los enunciados que sigan provendrán de ciertos enunciados precedentes en virtud de la aplicación de cierta regla deductiva y que 3) la sucesión acabará en el teorema en cuestión. Con objeto de poder juzgar qué valor tendrá semejante demostración hemos de comprobar que se cumplan las condiciones 1) a 3); ahora bien, tal comprobación puede llevarse a cabo de las dos formas siguientes:

A) por simple inspección de la sucesión dada de enunciados o

B) por medio de una demostración formal de que la sucesión dada cumple, de hecho, las condiciones 1) a 3).

Si preferimos el método B) será preciso que valoremos la demostración formal que exige, cosa que, de igual modo, puede hacerse por dos métodos, el *A'*) y el *B'*); etc. Por consiguiente, si no queremos caer en una regresión infinita, tenemos que resignarnos a recurrir a una comprobación directa.

Esta implica, sin embargo, una apelación a la intuición; y si la demostración de que se trate aparece en forma escrita, hemos de recurrir a la intuición espacial. Ello no es muy grave, dado que la demostración se presentará bajo la forma de una configuración finita, por lo cual la comprobación no apelará sino a propiedades globales del espacio. Tenemos así un ejemplo característico de lo que Hilbert ha llamado *intuición finitista.*

Este tipo de intuición nos permite, en primer lugar, comprobar directamente la corrección de una demostración formal o de un cálculo numérico, pues semejante apelación a la intuición finitista no da lugar, por lo regular, más que a un resultado particular. Sin embargo, según Hilbert, permite asimismo asentar ciertos resultados de alcance general, si bien de carácter sencillo. Prefiero explicar este punto examinando un ejemplo ilustrativo. Vamos a considerar el sistema formal que sigue.

Fórmulas: A y B; y si X e Y son fórmulas, también lo será $X \vee Y$.

Axioma: $A \vee A \vee A$.

Reglas deductivas: (i) $\dfrac{X}{X \vee B}$ (ii) $\dfrac{Y \vee A \vee A}{Y}$

I) La fórmula $A \vee B \vee B$ es deductible.

Demostración. La deducción de esta fórmula es la siguiente:

$$\text{(ii)}\ \dfrac{A \vee A \vee A \quad [\text{ax.}]}{A}$$
$$\text{(i)}\ \dfrac{A}{A \vee B}$$
$$\text{(i)}\ \dfrac{A \vee B}{A \vee B \vee B}$$

II) La fórmula B no es deductible.

Demostración. Tratemos de deducir tal fórmula.

1) Si empezamos aplicando la regla (i) llegaremos a la

fórmula $A \vee A \vee A \vee B$, quedando excluida toda aplicación ulterior de la regla (ii); por consiguiente, no podremos nunca deshacernos de las letras $A \vee A \vee A$ de que habíamos partido.

2) La única posibilidad residirá, pues, en empezar aplicando la regla (ii), y mediante ella se obtiene la fórmula A; luego podemos aplicar la regla (i), con lo que llegamos a $A \vee B$. Y una vez más nos es imposible deshacernos de la letra A, con la que habíamos comenzado.

Por haberse agotado en vano todas las posibilidades de efectuar la deducción, podemos concluir que la fórmula B no es deductible.

III) Toda fórmula $A \vee B \vee \ldots \vee B$ es deductible.

Demostración. Empezamos por aplicar la regla (i) al axioma, de donde se obtiene A; y luego aplicamos la regla (ii) cuantas veces aparezca la letra B en la fórmula $A \vee B \vee \ldots \vee B$ de que se trate.

Por más que la demostración del teorema III) se refiera a la vez a todas las fórmulas $A \vee B \vee \ldots \vee B$, cuyo número es infinito, posee

a) un carácter intuitivo, ya que se ocupa —digámoslo así— por separado de cada una de las fórmulas $A \vee B \vee \ldots \vee B$, dando para cada una de ellas una prescripción que permite deducir esa fórmula particular, y

b) un carácter finitista, dado que no interviene en ella de modo alguno la noción de infinito.

No deja de tener interés establecer un paralelo entre la demostración del teorema III) y la del teorema

toda identidad lógica es deductible,

que hemos presentado en el capítulo 3, § 23. Esta última demostración, pese a la aparente analogía entre ambas, no es de índole finitista, ya que en ella interviene la noción de infinito; pese a lo cual, parece que la demostración dada en el § 23 contiene una prescripción que permite efectuar la demostración de una identidad lógica cualquiera, puesto que habremos forzosa-

mente de encontrar una deducción sin más que construir el cuadro semántico correspondiente a la identidad lógica en cuestión. Sin embargo, también en este aspecto existe una gran diferencia entre las dos: en el caso del teorema III), la prescripción fija de modo preciso la longitud que tendrá la deducción de la fórmula $A \vee B \vee \ldots \vee B$ que se nos haya dado; por el contrario, en lo que se refiere al § 23, la demostración no nos dice nada acerca de la longitud que haya de tener la deducción de la identidad lógica que sea: lo único que sabemos es que la longitud del cuadro semántico correspondiente no será infinita.

Si se quiere atribuir un carácter intuitivo a una demostración del tipo de la del § 23, es necesario postular la existencia de una *intuición del infinito*, lo cual excede de los límites de la intuición finitista según Hilbert.

Los intuicionistas de la escuela de Brouwer admiten, sin duda alguna, semejante intuición, pues si bien por una parte no aceptan más que las demostraciones matemáticas de carácter intuitivo, por otra no reconocen los estrechos límites impuestos a la intuición finitista. De todos modos, la libertad que otorga Brouwer a la intuición del infinito es relativamente modesta.

El cantorismo postula una intuición mucho más poderosa que ésta.

Adviértase que el postulado de una intuición del infinito no se hace obligado más que cuando se exige que toda demostración tenga un carácter intuitivo y se quiere, al mismo tiempo, sobrepasar los reducidos límites de la intuición finitista: es perfectamente posible no aceptar más que esta intuición y dar por concluyentes demostraciones no finitistas, pero sin atribuirles un carácter intuitivo.

Acaso sea útil para aclarar todo lo que precede que termine este parágrafo expresando mis propias opiniones sobre la cuestión. A mi juicio, contamos con una intuición finitista que es, a la vez, indispensable y digna de confianza; también tenemos intuiciones que exceden de lo finito, pero son demasiado vagas y variables para permitirnos juzgar las matemáticas no finitistas de acuerdo con su alcance intuitivo; y estas últimas

constituyen algo así como una extrapolación artificial de las finitistas.

Semejante extrapolación se debe a la interacción de diversos factores: los datos intuitivos, las necesidades que se advierten en los dominios de aplicación, las exigencias de la lógica, las cuestiones planteadas por teorías matemáticas ya elaboradas. Y esta interacción se manifiesta ante todo en una *crisis de fundamentos*, de la que luego emerge un nuevo tipo de matemáticas.

§ 34. El platonismo como visión intuitiva real o pretendida y la crítica nominalista.—El lema de una de las grandes memorias de Cantor expresa con notable claridad la inspiración platónica de su pensamiento [4]:

Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus *.

En Hermite encontramos una actitud parecida [5]:

Si no me equivoco, existe todo un mundo, que es el conjunto de las verdades matemáticas, al que no tenemos acceso sino por la inteligencia, como existe el mundo de las realidades físicas; uno y otro independientes de nosotros, ambos de creación divina, que no parecen distintos más que por la flaqueza de nuestro espíritu, que para un pensamiento poderoso no son más que una y la misma cosa y cuya síntesis se revela parcialmente en esa maravillosa correspondencia entre las matemáticas abstractas, por un lado, y la astronomía, con todas las ramas de la física, por otro.

Frege, que «reconocía un dominio de lo objetivo y no real», ha expresado una opinión análoga de forma todavía más sorprendente [6]:

Ni siquiera el matemático puede crear cosas a voluntad, como tampoco el geógrafo: él también sólo puede descubrir lo que exista y darle nombre.

---

4 CANTOR, 1895.

* «Pues no damos a nuestro arbitrio leyes al entendimiento ni a las cosas, sino que, como amanuenses fieles, recogemos y describimos las que han sido mostradas y manifestadas por la voz de su naturaleza.» (*N. del T.*)

5 LALLEMAND, 1934, pág. 192.

6 FREGE, 1894, págs. 107-8.

Así pues, estos tres pensadores matemáticos están de acuerdo en atribuirse una visión intuitiva referente a un dominio de entidades que sobrepasa el de lo finito. No sería difícil citar otros testimonios de un alcance análogo; sin embargo, el caso de Cantor es, sin duda alguna, el más interesante, porque la descripción de lo que veía se desarrolló luego, por sus propios trabajos y los de sus adeptos, en una sublime teoría que constituye el fundamento de gran parte de las matemáticas contemporáneas.

En cuanto extrapolación de las matemáticas existentes, la teoría de conjuntos constituye un caso absolutamente excepcional. Es cierto que, por ejemplo, la incorporación de los números complejos al universo matemático fue también una extrapolación considerable, y que la puesta a punto de la base teorética para las operaciones con tales números ha permitido, entre otras cosas, el tan fructífero desarrollo de la teoría de funciones complejas; pero este paso estaba preparado por un largo período de tentativas vacilantes. Cantor, por el contrario, reveló de un solo golpe, sin preparación alguna comparable, todo un inmenso universo de nuevas entidades matemáticas.

Las platonistas doctrinas que este matemático se obstinaba en mezclar con sus teorías matemáticas no complacían a todo el mundo, y el descubrimiento de las antinomias (cf. el capítulo 3, § 17) pareció dar razón a los numerosos matemáticos que habían expresado su falta de confianza en los métodos conjuntistas. Sin embargo, el hecho de haberse podido eliminar las antinomias sin afectar a lo esencial de la teoría no ha reconciliado a los adversarios con sus elementos platonistas. (Recientemente se ha mostrado que cabe efectuar una refundición nominalista de la teoría de conjuntos, pero esta versión posee un carácter sumamente artificial[7].)

Desde el punto de vista de la psicología, lo que tendría mayor interés sería saber algo preciso acerca de la visión intuitiva a que apelaba Cantor (es indudable que no podemos dudar de la perfecta sinceridad al respecto del gran matemático). Por una parte, es sumamente plausible que lo guiasen en sus investigaciones unas intuiciones relativamente claras y distin-

[7] GÖDEL, 1944.

tas; y, por otra, hemos admitido la existencia real de una intuición de lo infinito; intuición que, en general, es vaga y variable, pero ello no excluye, en modo alguno, la posibilidad de que Cantor haya tenido, en especial durante ciertos períodos de esfuerzo concentrado, unas imágenes de precisión, claridad y estabilidad extraordinarias. Cabe pensar, a este respecto, en imágenes de conjuntos bien ordenados de tipo elevado; sin embargo, es difícil de creer en la posibilidad de una imagen intuitiva más o menos adecuada del conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales de la clase 2.ª *.

Por consiguiente, es harto plausible que ciertas imágenes apropiadas hayan estimulado la formación de la teoría de conjuntos, pero apenas cabe creer en una visión intuitiva más o menos adecuada de la totalidad de las entidades cuya existencia exige esta teoría; y si Cantor creyó tener semejante visión, es totalmente probable que fuese víctima de una ilusión.

---

* Estos son, dicho sucintamente, los ordinales numerables, o sea, los ordinales de todos los conjuntos (bien ordenados) de número cardinal infinito numerable. Más explícitamente, aunque sin todo rigor: cada uno de estos números ordinales es la «propiedad» común a todos los conjuntos bien ordenados de número cardinal infinito numerable que sean coordinables entre sí mediante una correspondencia biunívoca *que conserve el orden*. (*N. del T.*)

6 LAS «MAQUINAS DE PENSAR» Y EL PENSAMIENTO MATEMATICO

§ 35. La formalización y la construcción de una «máquina de pensar».—Una de las objeciones más corrientes a la idea de la formalización de la lógica y de las matemáticas consiste en afirmar que semejante formalización reduciría a operaciones puramente mecánicas el pensar lógico y matemático, y permitiría, pues, construir una «máquina de pensar» capaz de reemplazar a los respectivos hombres de ciencia; mas si admitiésemos esta posibilidad nos veríamos obligados a negar toda originalidad al pensamiento lógico y matemático, de suerte que sería incompatible con la experiencia que tenemos, según la cual la solución de los problemas matemáticos, especialmente, exige un pensamiento verdaderamente original.

Para apreciar el valor de esta objeción será preciso que penetremos más a fondo en las relaciones entre la formalización y la construcción de una «máquina de pensar».

Ahora bien, es evidente que la posibilidad de construir semejante máquina, capaz de reemplazar al lógico y al matemático en lo que se refiera a la solución de cierta clase, más o menos amplia, de problemas, implica la posibilidad de una formalización completa de la lógica o de las matemáticas en la medida en que intervengan en el estudio de los problemas de dicha clase.

En efecto, sea P un problema de la clase aludida. Dado que, por hipótesis, cabrá someterlo al lógico o al matemático, tiene que ser posible, asimismo, someterlo a la máquina; por consi-

guiente, ha de ser posible formularlo por medio de cierto código que permita su transmisión a ésta.

Además, si el lógico o el matemático es capaz de resolver el problema *P*, será menester que lo sea igualmente la máquina y que el código nos permita enterarnos de cuál haya sido la solución dada por ésta.

Finalmente, puesto que no aceptamos solución alguna del lógico o del matemático que no sean capaces de justificar, es preciso que el método empleado permita a la máquina justificar su solución. Por lo tanto, podremos estatuir una formalización apropiada exigiendo que, de ahora en adelante, los hombres de ciencia indicados tampoco expresen los problemas de la clase escogida ni sus soluciones respectivas más que valiéndose del código adaptado a la construcción de la máquina.

Al imponer este código a los lógicos y matemáticos no limitamos de forma alguna su capacidad para resolver los problemas de la clase de que se trate.

Pues sea *P'* un problema de ésta que supieran resolver antes; como, por hipótesis, la máquina es capaz de reemplazar al lógico o al matemático en las tareas correspondientes, también lo será en cuanto a resolver *P'* y a justificar la solución que proporcione; pero la máquina no dispone de otra cosa que del código, luego éste permitirá expresar y justificar la solución obtenida por el lógico o el matemático.

§ 36. La construcción de una «máquina de pensar» presupone la solución de determinado problema de decisión *.—Supongamos ahora que la máquina no sea capaz de ofrecer solución alguna a cierto problema, *P*; entonces, en virtud de lo que hemos supuesto, es imposible que ningún lógico o matemático resuelva jamás *P*; y este problema, pues, será *irresoluble*.

¿Cómo se comportará la máquina en semejante situación? Conviene distinguir a este respecto entre dos géneros de clases, *C*, de problemas.

I) Si se plantea a la máquina cierto problema irresoluble,

* Recuérdese que, como ya hemos indicado en nuestra nota al § 28, debería decirse «problema de la averiguación (*o* de la aclaración)», o emplearse alguna otra expresión análoga. (*N. del T.*)

P, de la clase *C*, tras cierto número de tentativas infructuosas la máquina se detiene.

II) Si se plantea a la máquina cierto problema irresoluble, *P*, de la clase *C*, puede suceder que la máquina no se detenga nunca.

Es preciso examinar por separado estos dos casos.

Con respecto a I). En este caso, conviene reemplazar la clase, *C*, de los problemas *P* por la clase C^o, de los problemas, P^o, que se enuncian así:

P^o: *resuélvase el problema P de la clase C o bien, si esto fracasa, muéstrese que P es irresoluble.*

Ahora bien, nuestra máquina permite resolver todo problema, P^o, de la clase C^o. En efecto, sea P^o uno de estos problemas, y propongamos a la máquina el problema *P* correspondiente; entonces, o bien ésta proporcionará la solución de *P*, o se detendrá sin dar ninguna solución, y en ambos casos quedará resuelto el problema P^o.

Cabría preguntarse si en el segundo caso habrá quedado suficientemente justificada la solución de P^o; sin embargo, si dudamos de que esta solución sea sólida, ello quiere decir que admitimos que un problema de la clase *C* podrá tener una solución no proporcionada por la máquina, cosa cuya posibilidad habíamos excluido desde el principio.

Con respecto a II). En este caso no tiene utilidad alguna reemplazar la clase *C* por la C^o; pues mientras no se detenga la máquina no sabremos ni la solución del problema *P* ni la del P^o.

Es conveniente ilustrar estos dos casos mediante un ejemplo típico.

Ejemplo I). Consideremos la clase, *C*, de todos los problemas, *P*, que se enuncien así: *deduzcase la fórmula X*, siendo *X* una fórmula cualquiera del sistema formal estudiado en el capítulo 5, § 33. Es fácil de imaginar una máquina capaz de resolver los problemas de este género: semejante máquina intentará primeramente quitar hacia atrás las letras V *B*, luego

tratará de añadir letras $\vee A \vee A$, yendo también hacia atrás, y si llega a $A \vee A \vee A$, la deducción será realizable invirtiendo el orden de sucesión de las operaciones; en caso contrario, la máquina se detendrá sin haber resuelto el problema. Sin embargo, con esta máquina se lograrán resolver completamente todos los problemas del tipo

P^o: *dedúzcase la fórmula X o bien, si esto fracasa, muéstrese que X no es deductible.*

Ejemplo II). Ahora consideramos la clase, C, de todos los problemas, P, del tipo

P: *demuéstrese que U es una identidad lógica,*

siendo U una fórmula cualquiera del género descrito en el capítulo 3, § 22.

En este caso, podemos imaginar una máquina que construya un cuadro semántico para la secuencia $\varnothing / U$; pero puede suceder que la construcción continúe indefinidamente, sin que lleguemos jamás a saber si el problema es o no resoluble.

Hemos reemplazado la clase, C, de los problemas P por otra clase, la C^o, formada por los problemas P^o. Observemos ahora que conviene simplificar aún un poco más la situación introduciendo la clase, C^{oo}, de todos los problemas, P^{oo}, tales como

P^{oo}: *respóndase a la cuestión de saber si el problema P es resoluble o no lo es,*

siendo P un problema cualquiera de la clase C.

En el caso I), la máquina permite resolver todo problema, P^{oo}, de la clase C^{oo}. Pero supongamos en este momento que tenemos una segunda máquina construida con la finalidad de no resolver sino los problemas de la clase C^{oo}; vamos a ver que esta máquina no será esencialmente inferior a la primera.

Supóngase que nos encontramos con la primera máquina en el caso II), de modo que, en ocasiones, cuando el problema P de la clase C que se haya propuesto sea irresoluble, la máquina continuará indefinidamente. Observemos, en primer lugar, que, por definición, la segunda máquina no puede presen-

tar este inconveniente. En efecto, supongamos que esta segunda máquina, tras haberse puesto en marcha para resolver cierto problema, P^{oo}, continúe funcionando sin detenerse nunca; entonces el problema P correspondiente no podrá ser resoluble, ya que, si lo fuese, esta segunda máquina tendría que detenerse para anunciar que P era resoluble; pero si P es irresoluble, por hipótesis, esta misma máquina se parará asimismo, para anunciar que es irresoluble; luego de todos modos la segunda máquina tendrá forzosamente que detenerse.

Ahora bien, esta propiedad de la segunda máquina nos permite perfeccionar la primera: basta acoplar ambas entre sí de tal modo que la introducción del problema P en la primera conlleve automáticamente la del problema correspondiente, P^{oo}, en la segunda, y que cuando esta última se detenga anunciando que el problema P^{oo} es irresoluble haga asimismo detenerse a la primera; de este modo, recaemos en el caso I) mediante esta primera máquina así perfeccionada. Y a la inversa, si resulta imposible construir una máquina perfeccionada para los problemas, P, de cierta clase, C, es que será imposible construir una máquina para los problemas, P^{oo}, de la clase C^{oo}.

Observemos, para terminar, que si disponemos de una máquina para los problemas, P^{oo}, de la clase C^{oo}, podemos prescindir de una máquina para los problemas, P, de la clase C. Hay que subrayar, por otra parte, que no nos contentamos con un *oráculo*: exigimos que la máquina sea verdaderamente un aparato mecánico y que comprendamos su funcionamiento, de suerte que tengamos la garantía de que resolverá todo problema, P^{oo}, de la clase C^{oo}, y que su solución será siempre correcta; en el caso de que la solución de cierto problema, P^{oo}, sea negativa, ello implica que la máquina ha de explorar, del modo que sea, todas las posibilidades de llegar a una solución de P; y para que esté justificada una solución afirmativa es preciso que la máquina haya comprobado, de la manera que sea, alguna solución del problema P. Es decir, que si la máquina anuncia que P es resoluble, una inspección de las operaciones realizadas por ella tiene que permitirnos resolverlo.

Por consiguiente, bastará estudiar la construcción de estas máquinas para resolver los problemas de las clases del tipo C^{oo};

dicho de otro modo, los problemas cuya solución se expresa mediante un «sí» o un «no».

Además, no es posible emprender la construcción de una máquina destinada a semejante clase de problemas, C^{oo}, antes de estar en posesión de un método general que permita resolver en principio todo problema, P^{oo}, de tal clase. La máquina, pues, sólo servirá para liberarnos del trabajo mecánico inherente a la utilización de este método para resolver los problemas concretos, P^{oo}, de que se trate.

El problema de asentar un método general que permita resolver todo problema, P^{oo}, perteneciente a la clase C^{oo} recibe el nombre de *problema de la decisión* para esta clase. Y de lo que hemos dicho en el presente parágrafo resulta que *la construcción de una máquina eficaz* —o sea, que no plantee las complicaciones del caso II)— *capaz de resolver todo problema resoluble, P, de la clase C, presupone resolver el problema de la decisión referente a la correspondiente clase* C^{oo}.

§ 37. Irreductibilidad, según Brouwer, del «salto del fin a los medios».—En su tesis doctoral *Sobre los fundamentos de las matemáticas*, de 1907, expresó Brouwer[1], del modo que sigue, el principio de la irreductibilidad del *salto del fin a los medios.*

> El comportamiento vital de los hombres tiene tendencia a observar el mayor número posible de tales secuencias matemáticas <o sistemas causales>, para, siempre que parezca que se puede intervenir en la realidad con mejor resultado en presencia de un elemento anterior que en presencia de uno posterior de semejante secuencia, elegir el primer elemento como objetivo de sus actos, por más que sea solamente el último el que afecte al instinto (substitución del *fin* por el *medio*). Sin embargo, el carácter no instintivo de esta actividad intelectual hace que sea muy imperfecta la certidumbre de la coherencia de las partes de una secuencia, de modo que cabe siempre desmentirla, cosa que se percibe como un descubrimiento del hecho de «que la regla ya no vale».

La significación en el presente contexto de esta observación me parece obvia: la función propia de la inteligencia consiste en resolver problemas, y resolver un problema equivale a encontrar los medios que sean idóneos con respecto a cierto fin;

---

[1] BROUWER, 1907, págs. 81-2.

pero si los medios no están nunca determinados fatalmente por el fin que se haya propuesto, será siempre necesario recurrir a la inteligencia para encontrar los medios adecuados para éste, consideración que excluye la posibilidad de construir una máquina capaz de resolver cualquier problema.

La concepción de Brouwer se ve en gran medida confirmada por el resultado de nuestras reflexiones del § 36. Hemos visto allí que no se puede construir una máquina que permita resolver todo problema, *P*, perteneciente a cierta clase, *C*, más que si esta última cumple ciertas condiciones fuertemente restrictivas, a saber, que

1) sea posible expresar los problemas, *P*, de la clase *C*, juntamente con las soluciones que admitan, por medio de cierto código; que
2) este código permita asimismo expresar cierto número de operaciones tales que, si un problema, *P*, de la clase *C* admite solución, sea posible resolverlo aplicando exclusivamente tales operaciones, y que
3) sea resoluble el problema de la decisión para cierta clase, C^{∞}.

Pero incluso si una clase *C* determinada cumple las condiciones 1) a 3), no es seguro que en cierto sentido quepa decir que los problemas *P* de *C* pueden resolverse sin recurrir a la inteligencia: pues sólo ésta permite 1) construir el código apropiado, 2) enumerar las operaciones de forma conveniente, y 3) resolver el problema de la decisión para la clase C^{∞}.

§ 38. Las funciones recursivas; problemas irresolubles e irresolubilidad absoluta.—Conviene volver una vez más al sistema formal estudiado en el capítulo 5, § 33. Es fácil demostrar que

IV) todas las fórmulas

$$A \vee B \forall B \vee \ldots \vee B \quad \text{y} \quad A \vee A \vee A \forall B \vee B \forall \ldots \forall B$$

son deductibles, y sólo ellas lo son.

Por consiguiente, no presenta dificultades la resolución del problema de la decisión para la clase, C^{oo}, de todos los problemas

P^{oo}: *respóndase a la cuestión de saber si la fórmula X es deductible o no.*

Voy a mostrar ahora cómo se puede aritmetizar la sintaxis del sistema formal de que nos estamos ocupando, siguiendo las indicaciones generales dadas en el capítulo 3, § 20. El primer paso consistirá en asociar a cada fórmula, X, de tal sistema un *número de Gödel*, $g(X)$.

Ello se logra de la manera que sigue. Empezamos por escribir una primera cifra, «1», luego recorremos la fórmula X de izquierda a derecha: si encontramos la letra «A» escribimos la cifra «1», y si encontramos la letra «B», la cifra «0»; cifras que se van escribiendo de izquierda a derecha, a continuación (y a la derecha) de la primera cifra «1». Por ejemplo, a la fórmula

$$A \vee A \vee A \vee B$$

corresponderá así el complejo de cifras

«11110».

Interpretaremos semejantes complejos como notación en el sistema binario de los números naturales $g(X)$. Por ejemplo, el complejo «11110» es la notación binaria del número 30, por lo cual se tendrá que $g(A \vee A \vee A \vee B) = 30$.

Partiendo de aquí podemos pasar a la aritmetización de las reglas fundamentales que caracterizan a este sistema formal. En lo que se refiere a las fórmulas, advertimos que todo número natural $n > 1$ podrá ser el número de Gödel de una fórmula bien determinada, X.

Cabe aritmetizar las estipulaciones que fijan el axioma y las reglas de deducción introduciendo una función, f, definida del modo siguiente:

1) $f(0) = f(1) = 0$;

2) $f(15) = 1$ (adviértase que $15 = g(A \vee A \vee A)$;

3) si $f(n) = 1$, se tendrá $f(2 \cdot n) = 1$;

4) si $n > 1$ y $f(4\ n + 3 = 1$, se tendrá $f(n) = 1$, y

5) si $f(n)$ no queda definida por las estipulaciones 1) a 4), entonces se tendrá $f(n) = 2$.

No es difícil hacer ver que $f(n) = 1$ si n es el número de Gödel, $g(X)$, de una fórmula deductible, X, y que $f(n) = 2$ si n es el número de Gödel, $g(X)$, de una fórmula no deductible, X.

Las distintas observaciones que hemos hecho sobre nuestro pequeño sistema formal adquieren la forma aritmética siguiente:

I^a^) $f(12) = 1$; en efecto, $f(4 \cdot 3 + 3) = f(15) = 1$; luego $f(3) = 1$; por consiguiente, $f(6) = f(2 \cdot 3) = 1$, y $f(12) = f(2 \cdot 6) = 1$ [adviértase que $12 = g(A \vee B \vee B)$].

II^a^) $f(2) = 2$.

III^a^) Para todo k, $f(3 \cdot 2^k) = 1$.

IV^a^) Para todo k, $f(3 \cdot 2^k) = f(15 \cdot 2^k) = 1$; para cualquier otro $n > 1$, $f(n) = 2$.

Entonces, la clase C^{oo} a que antes nos referíamos queda sustituida por la clase, C^{ooo}, de todos los problemas:

P^{ooo}: *respóndase a la cuestión de saber si* $f(n) = 1$ ó $f(n) \neq 1$, siendo n el número de Gódel, $g(X)$, de una fórmula cualquiera, X, de este sistema formal.

Es evidente que el problema de la decisión para la clase C^{ooo} es resoluble, dado que *el valor, $f(n)$, de la función f es efectivamente calculable para todo valor dado de n.* Y la resolubilidad del problema de la decisión para la clase C^{ooa} implica la del mismo problema para la clase C^{oo}.

Volvemos ahora al análisis comenzado en los §§ 36 y 37, tomando como prototipo del caso general nuestro sistema formal. De las condiciones 1) a 3) que hemos enunciado en el § 37, la 1) y la 2) son casi triviales, en el sentido de que si estas conde decisión; en nuestro caso (el de este sistema formal), amdiciones no se cumplen no se plantea ningún problema preciso

bas se cumplían, ya que las fórmulas mismas constituían un código satisfactorio, a la vez que la elección del axioma y de las dos reglas de deducción formaba una enumeración de las operaciones aplicables para llegar a resolver el problema, *P*, de *C* que se plantee; y unos datos análogos bastarían para caracterizar otras clases, *C*, de problemas *P*.

Por consiguiente, será posible adaptar a otras clases, *C*, la aritmetización que acabamos de explicar en un caso específico, en particular:

1. Al aritmetizar el código asociamos a cada problema, *P*, perteneciente a cierta clase, *C*, un número natural determinado, n.

2. La enumeración de las operaciones se traduce entonces por un sistema de condiciones caracterizadoras de cierta función aritmética, f; y se tendrá $f(n) = 1$ si es resoluble el problema *P* correspondiente a n, pero $f(n) \neq 1$ si no lo es.

3. La clase, C^{oo} de todos los problemas

P^{oo}: *respóndase a la cuestión de saber si el problema P es resoluble o no,*

queda reemplazada por la clase, C^{ooa}, de todos los problemas

P^{ooa}: *respóndase a la cuestión de saber si* $f(n) = 1$ *o si* $f(n) \neq 1$,

siendo n el número que caracterice al problema *P* de la clase inicial. Por ejemplo, en el caso de nuestro pequeño sistema formal, n era el número de Gödel, $g(X)$, de una fórmula, *X*, cuya deducción era exigida por *P*.

4. En definitiva, el problema de la decisión para la clase C^{oo} o para la clase C^{ooa} será resoluble si y solamente si *el valor,* $f(n)$, *de la función* f *es efectivamente calculable para un valor cualquiera de la variable* n.

A las funciones f que cumplen esta condición se les llama *funciones recursivas*. De este modo, pues, el estudio de los problemas de decisión se reduce al de las funciones recursivas —o, dicho con mayor exactitud, al estudio del carácter recur-

sivo o no recursivo de una función aritmética, f, caracterizada por ciertas condiciones.

No cabe duda de que sería deseable poder delimitar la clase de las condiciones que sea preciso tener en cuenta. Ahora bien, cabe limitar el examen a las condiciones expresables por medio de cierto formalismo, R, cosa que es posible comprender a grandes rasgos mirando la terminología empleada para enunciar las condiciones I[a]) a IV[a]): pues éstas se pueden expresar en un formalismo que incluya una notación para las operaciones + y, para la función exponencial, la igualdad y la negación, la implicación y la cuantificación. De suerte que una notación de este género nos permitirá, en general, llevar a cabo 1) la aritmetización de cierto código, y 2) la traducción de una enumeración de las operaciones aplicables para llegar a la solución de los problemas, P, pertenecientes a determinada clase, C.

Dando esto por supuesto, podemos asociar un número de Gödel, $g(S)$, a cada sistema, S, de condiciones expresables en el formalismo R. A continuación introducimos la clase, D^{oo}, de todos los problemas

Q^{oo}: *respóndase a la cuestión de saber si el número natural n es el número de Gödel, $g(S)$, de un sistema, S, de condiciones expresables en el formalismo R y que caractericen una función recursiva, f, o no.*

Ahora especificamos cierta función, F, del modo siguiente:

1) si n es el número de Gödel, $g(S)$, de un sistema, S, caracterizador de una función recursiva, por ejemplo, f_n, se tendrá $F(n) = f(n) + 2$;

2) en caso contrario, $F(n) = 1$.

De acuerdo con lo que acabamos de explicar, las condiciones 1) y 2) son expresables en el formalismo R. Sea ahora T el sistema de estas dos condiciones tal y como aparezcan en la notación del formalismo R, y sea t el número de Gödel, $g(T)$, de T; propongámonos determinar el valor de $F(t)$.

Con respecto a 1).—Vamos a suponer primeramente que

sea t el número de Gödel de un sistema de condiciones caracterizadoras de cierta función recursiva, f_t; en tal caso, habría de ocurrir que $F(t) = f_t(t) + 2$. Pero t es el número de Gödel del sistema de condiciones que caracterizan la función F, luego f_t será la misma función que F, por lo cual $f_t(t) = F(t)$; en consecuencia, t no puede ser el número de Gödel de un sistema de condiciones que caractericen cierta función recursiva, f_t.

Con respecto a 2).—Resulta de lo anterior que se tendrá $F(t) = 1$.

Supóngase al llegar a este punto que se haya resuelto el problema de la decisión correspondiente a la clase D^{oo}. Entonces, para cada número natural, n, podríamos responder a la pregunta acerca de si el sistema S tal que $g(S) = n$ define o no una función recursiva, f_n; luego podríamos calcular el valor de $F(n)$ para cada uno de los de n, y la función F sería recursiva. Pero, de acuerdo con lo que hemos obtenido *con respecto a* 1), esta función no puede ser recursiva; por consiguiente, *el problema de la decisión para la clase* D^{oo} *es irresoluble.*

Kálmar ha subrayado que este resultado, aun cuando análogo al primer teorema de Gödel (cf. el capítulo 3, § 20), e incluso deductible de él, tiene un alcance más profundo —o, más bien, saca a luz toda su hondura—. En efecto, si toda formalización, T, de la aritmética es incompleta en el sentido de que no nos permite demostrar cierta fórmula $Q(q^o)$ que, sin embargo, es verdadera, el carácter de irresolubilidad del problema de asentar $Q(q^o)$ es sólo *relativo*, ya que tal problema queda resuelto en cuanto se hace más idónea la formalización T añadiendo axiomas apropiados; mas el problema de la decisión acerca de la clase D^{oo} constituye, por el contrario, un ejemplo de *irresolubilidad absoluta*, dado que no es posible resolverlo introduciendo, por ejemplo, unos axiomas aritméticos de mayor fuerza. Así pues, *si se quiere responder, para un sistema S cualquiera, a la cuestión de saber si S caracteriza o no una función recursiva, no basta tener una máquina, sería preciso recurrir a un oráculo.*

§ 39. Los dos grados de libertad del pensamiento matemático: resolver un problema y plantearlo.—La clase D^{oo} se com-

pone de una sucesión infinita de problemas, por ejemplo, P_1, P_2, ..., P_n, ... Acabamos de resolver el problema P_t, y la solución obtenida implica la imposibilidad de resolver todos los problemas incluidos en D^{∞} por medio de una máquina o por un método mecánico y uniforme. Por lo tanto, habrá que dejar una gran libertad en cuanto al método que vaya a aplicar al matemático que quiera ocuparse de cierto problema, P_k, de dicha clase; ésta es una primera conclusión reconfortante, que podemos enunciar en virtud de los resultados de nuestro estudio del § 38.

Sin embargo, cabría pensar que, en lo que se refiere a la elección de los problemas, el matemático se ve constreñido a atenerse a la clase D^{∞}. Pero semejante opinión carece de fundamento.

Recordemos que los problemas, P, incluidos en la clase D^{∞}, son todos *problemas de decisión,* de modo que cada uno de ellos se referirá, a su vez, a toda una clase de problemas, P', que se procurará resolver mediante un procedimiento uniforme, sin admitir otros métodos de solución que unos que hayan quedado perfectamente delimitados de antemano. En las matemáticas se presentan en ocasiones problemas de este género: los teoremas relativos a la posibilidad de reemplazar un polígono cualquiera por un cuadrado de la misma superficie, y a la de descomponer un entero cualquiera en factores primos, expresan, entre otros, la resolubilidad de algunos de tales problemas; pero lo que ha realzado todo el interés que presentan ha sido la investigación de fundamentos.

Si el matemático se ocupara de cierta clase de problemas, ello no significa necesariamente que se plantee un problema de decisión *: es asimismo posible que se proponga determinar los métodos que permitan resolver todos los problemas de la clase dada; y puede suceder también que un matemático trate, a la inversa, de delimitar la clase de problemas resolubles aplicando exclusivamente ciertos métodos de solución que se haya fijado de antemano.

---

* Obsérvese cómo aparece aquí cierta ambigüedad, debida a la compatibilidad del texto con la acepción psicológica de 'decisión'; una vez más, «problema de averiguación (*o* de aclaración)», como proponíamos en nuestra nota del § 28, evitaría estos defectos. (*N. del T.*)

En el caso normal, las investigaciones del matemático se concentran sobre un problema individualizado. Lo cual no quiere decir, necesariamente, que se encuentre tan estrictamente delimitado como los casos individuales, P', que entran en un problema de decisión del tipo de P: por ejemplo, puede tratarse de un teorema de la teoría de funciones reales que sea evidentemente trivial para las funciones continuas y que, por otra parte, no sea válido para una función real cualquiera; al generalizarlo cabrá dejar intacto su enunciado, pero intentar asentar su validez para cierta clase de funciones no continuas, o también puede intentarse asentar, para las funciones continuas, un enunciado más fuerte o más preciso; y una tercera posibilidad consiste en asentar un enunciado más débil para una clase relativamente extensa de funciones no continuas. Al plantearse el problema de generalizar el teorema, es fácil que el matemático vacile entre estas tres posibilidades; entonces, el problema inicial será vago, y uno de los objetivos de la investigación será conferirle precisión.

Así pues, incluso en cuanto a la elección de los problemas, el matemático dispone de mayor libertad de la que tal vez nos sintamos inclinados a atribuirle. Y la investigación de fundamentos, al subrayar el interés de los problemas de decisión, no tiende a restringir su libertad a este respecto, sino que más bien tiende a ampliarla abriendo nuevos campos de investigación.

§ 40. **La evidencia adquirida según Bernays.**—La decadencia de la doctrina aristotélica de las ciencias y de las doctrinas de Descartes y Kant, que, en cierto modo, constituían un desarrollo más o menos independiente de aquélla, ha liberado a los matemáticos de la preocupación permanente por la conformidad de sus concepciones con los datos de la evidencia intuitiva, preocupación que, sin duda alguna, frenó la elaboración de las geometrías no euclídeas y, sobre todo, la aceptación de su carácter científico. La floración de la matemática abstracta nos prueba que los matemáticos han sabido hacer buen uso de su libertad.

Sin embargo, en el capítulo 5 nos habíamos percatado de que la intuición no ha perdido enteramente importancia para

las matemáticas, por más que su papel haya cambiado profundamente. Cabe preguntarse, con todo, si no debería contarse con que una eliminación progresiva de los elementos intuitivos constituya, a la larga, un peligro para el desarrollo de la matemática; pues la apelación a la evidencia intuitiva con carácter normativo ha dañado con frecuencia la libertad de los matemáticos, pero la intuición, consultada con un espíritu más libre, ha resultado asimismo ser fuente de direcciones frecuentemente fructíferas.

Conviene examinar en el presente contexto las concepciones de Bernays, que tienen una importancia suma. Este pensador ha hecho observar que, frente a lo que pensaba toda la tradición filosófica, la evidencia no es un elemento invariable a través de la historia intelectual de la humanidad, sino que, por el contrario, es una entidad compleja, capaz de ser influida por nuestra experiencia: hay una evidencia que se pierde, pero también hay una evidencia adquirida.

Hace largo tiempo que la doctrina del condicionamiento de la evidencia por parte del medio cultural es un tema favorito de la antropología cultural y de la sociología del conocimiento. Es cierto que esta última disciplina ha hecho a menudo un uso de tal doctrina que da lugar a conclusiones relativistas y que, por ello, suscita ciertas objeciones que K. R. Popper ha formulado con tanto vigor como justeza. Sin embargo, las ideas de Bernays, más matizadas a este respecto, se encuentran, en mi opinión, a cubierto de esta crítica[2].

> Muchas veces se piensa que es menester, o bien aceptar una evidencia absoluta, o renunciar enteramente a la posible aportación de la evidencia a las ciencias. Mas en lugar a resignarse a este «todo o nada», parece más oportuno elaborar una concepción de la evidencia como noción adquirida: el hombre se hace con la evidencia como aprende a andar o como el pájaro aprende a volar. De esta forma se llega a reconocer, socráticamente, que en principio no sabemos nada de antemano: en los dominios teoréticos no podemos hacer otra cosa que experimentar con opiniones y puntos de vista y, eventualmente, llegar de este modo a un logro intelectual.

Bernays cita como ejemplo de una evidencia que se pierde el realismo ingenuo; y lo mismo podrían mencionarse los principios de la física peripatética. Como ejemplos de evidencias

[2] BERNAYS, 1954.

adquiridas, y que a la larga deberán abandonarse, presenta las que dominan la geometría euclídea y los métodos aritméticos, haciendo observar que, en el campo de la evidencia geométrica, la de las relaciones topológicas posee un carácter más primitivo y fundamental. Todo ello está de completo acuerdo con lo que hemos dicho en el capítulo 5, que, por lo demás, se inspiraba en gran medida en las ideas de Bernays.

Por mi parte, he hecho observar que la adquisición de nuevas evidencias en la historia está frecuentemente marcada por la aparición de argumentaciones fragmentarias, cuya fuerza demostrativa proviene, según confiesa en cada caso el autor, no de su forma lógica, sino de ciertos datos intuitivos; y a medida que las nuevas evidencias se van haciendo corrientes, tales argumentaciones se transforman en razonamientos de carácter normal. Citaré como ejemplo el *cogito* cartesiano.

Voy a permitirme hacer aquí algunas observaciones sobre la noción de experiencia, tal y como entra en el estudio presente. Es preciso tomar este concepto en un sentido muy amplio, de modo que abarque todo el contenido de nuestra vida mental: por ejemplo, las investigaciones de la matemática pura, por más que no apelen a ningún dato empírico en el sentido corriente de la palabra, no por ello dejan de proporcionar al investigador unas experiencias específicas, que quedan integradas en sus recursos intelectuales de la misma forma y con iguales títulos que las experiencias que tenga en otros dominios.

Al mismo tiempo se impone hacer una distinción en cuanto a los procesos de integración. En primer lugar, se tiene lo que podría llamarse la *integración inductiva*, que proviene de repetir experiencias semejantes, y es un proceso, por naturaleza, lento y *reversible* (cabe aniquilar más o menos fácilmente el resultado de una serie de experiencias parecidas que sugieran cierta conclusión merced a una serie de experincias contrarias). La *integración noética*, en cambio, se efectúa de un solo golpe, al tenerse cierta experiencia particularmente impresionante; este proceso es *irreversible*, pues da lugar a un resultado permanente que muy rara vez queda destruido por experiencias ulteriores.

Parece probable que las evidencias, en la medida en que no sean innatas, provengan, en general, de una integración noética: ésta, que en el adulto es, por su propia índole, un fenómeno bastante raro, probablemente desempeña un papel importante en los comienzos del desarrollo intelectual.

Me parece incuestionable la importancia de los fenómenos de que acabo de hablar para el estudio de la historia de las ideas y para la epistemología genética.

NOTA SOBRE LA IDEA DE LA «MAQUINA DE PENSAR»

Por Jean-Blaise GRIZE

La observación del pensamiento «natural», esto es, del conjunto de afirmaciones y razonamientos que encontramos en el discurso cotidiano, permite distinguir dos tipos de conductas: *ingenuas* por una parte, *formales* por otra. Por lo demás, esta distinción es sólo relativa, en el sentido de que ninguna conducta se puede jamás calificar de ingenua sino por comparación con otra que lo sea menos. En estas condiciones, la idea de la «máquina de pensar» tal y como la describe el profesor Beth adquiere una importancia considerable, ya que proporciona una descripción precisa del límite hacia el que tiende, sin llegar nunca a alcanzarlo, todo pensamiento formal.

En efecto: el análisis llevado a cabo en los parágrafos 36 y 37 hace ver que la construcción de una máquina de pensar para un campo dado se retrotrae a la resolución del problema de decisión correspondiente, es decir, a estar en situación de responder con un «sí» o un «no» a todo problema de tal dominio. Ahora bien, éste es un requisito que puede parecer obvio, pero que, sin embargo, exige que se den ciertas condiciones: pues es preciso parar mientes en que tanto el niño como el adulto no lógico de profesión contestan a menudo a una pregunta con «sí» y «no», sin sentir embarazo alguno; cosa que proviene de que, a cierto nivel de ingenuidad, ésa es la respuesta apropiada, y continúa siéndolo mientras las necesidades de la acción no fuercen al sujeto a realizar una elección (pero éste no puede elegir inmediatamente si no quiere caer en la arbitrariedad: le es preciso constituir antes clases de objetos, de predicados y de relaciones que, por lo menos, satisfagan las dos primeras condiciones del § 37).

Queda aún la tercera condición: que «sea resoluble el problema de la decisión para cierta clase, C^{00}». Supongamos que verdaderamente lo sea. Ante todo, sabemos que esto no sucede más que para una clase muy restringida de problemas, lo cual permite al profesor Beth decir que «será siempre necesario recurrir a la inteligencia». Pero pueden surgir luego dificultades imposibles de superar desde dentro de los formalismos, y que remitan a conductas más ingenuas: es fácil dar ejemplos de sistemas perfectamente formalizados cuyo problema de decisión tiene una solución conocida —así, por ejemplo, los sistemas S2 y S4 de Lewis y Langford—, pero en los que su aplicación requiere unos procesos tan laboriosos que no hay lógico ni máquina que los puedan

llevar a término; ahora bien, ocurre que la inteligencia es perfectamente capaz de resolver semejantes problemas, e incluso que se sabe capaz de resolver una cantidad ilimitada de ellos.

Consideremos el caso más frecuente: aquel en el que se conocen las premisas, la conclusión a que hay que llegar, las reglas y su efecto, pero en el que falta una regla utilizable efectivamente para valerse de las reglas; entonces, por hipótesis, el descubrimiento de una vía que lleve a la conclusión no provendrá de actividad formal alguna; y sin embargo, ello no significa que la inteligencia haya recurrido a ninguna especie de facultad divinatoria, más o menos misteriosa, ni siquiera a conductas puramente ingenuas. Y la prueba —recientemente aportada— la tenemos en que Newell, Shaw y Simon han conseguido construir «máquinas» capaces de simular algunas de las conductas de la inteligencia generalmente consideradas como ingenuas; tales máquinas exploran las fórmulas como objetos concretos, examinan sus semejanzas y sus diferencias, les aplican tal o cual operador y observan los cambios que se producen: como el pensamiento natural, incluyen ciertas reglas que son más consejos que imperativos, y, lo mismo que él, usan en ocasiones de su libertad para fracasar en la tarea[1].

Así pues, las máquinas de pensar y las de simular la inteligencia permiten comprender mejor los pasos reales que da el espíritu. Ambas suponen cierta parte de formalización, y ambas señalan su insuficiencia, cada una a su modo: las primeras, en cuanto que permiten discernir teórica, pero exactamente, sus posibilidades, y las segundas, dado que manifiestan concretamente sus fracasos.

---

[1] NEWELL, A., y SIMON, H. A., «The simulation of human thought», *The Rand Corporation, Paper*, pág. 1734, 22 de junio de 1959. Véase, sin embargo, BETH, «On machines that prove theorems» (1958), en donde se combaten las ideas de Newell y Simon.

SEGUNDA PARTE

INTRODUCCION [1]

En la primera parte de esta obra, E. W. Beth defiende la tesis —y la justifica históricamente— de una entera autonomía de las matemáticas y la lógica, si bien sostiene (§ 21) que el formalismo, pese a su notable importancia, no puede constituir una filosofía completa de estas disciplinas. Vamos a partir aquí exactamente de las mismas opiniones, y creemos estar de acuerdo con E. W. Beth en todas sus afirmaciones relativas a esa independencia radical de la tarea del lógico y del mate-

[1] Paralelamente a las informaciones que nos da E. W. Beth acerca de su formación intelectual en la Introducción a la primera parte de esta obra, puedo indicar, a mi vez, lo siguiente. Yo me he formado en las ciencias naturales, y en 1917 sostuve una tesis doctoral de zoología, relativa a la distribución y variabilidad de los moluscos terrestres en los Alpes de Valais; pero, al margen de tales estudios, sentía un vivo interés por los problemas de la teoría del conocimiento, y abrigaba la ambición de escribir, aun pasándome la vida en un laboratorio de zoología, una epistemología fundada en la biología. Llegué incluso, en aquella época, a redactar diversos borradores en este sentido, y, además de recibir las enseñanzas impartidas en la Facultad de Ciencias, seguí las de filosofía que daba en Neuchâtel un excelente maestro, el lógico A. Reymond.

Mas todos estos diversos intereses dieron lugar a una crisis, que modificó mi carrera. Por una parte, la frecuentación de los filósofos, por más que —como a todo el mundo— me sedujera según es habitual, hizo nacer en mí cierta inquietud: cualquiera que sea su honradez, la formación del filósofo le lleva a hablar de todo, y es frecuente que, cuando en el debate se desliza por cuestiones especiales o de momento no elucidables, el conocimiento de los textos baste para calmar sus escrúpulos, anteponiéndose al de los hechos. Por la otra, me descubrí una innegable tendencia a la especulación, y comprendí rápidamente que mi epistemología biológica sería una filosofía como otra cualquiera si me limitase, por un lado, a proseguir las investigaciones de zoología y, por otro, a «reflexionar» en las horas de ocio sobre las cuestiones generales. Lo cual me condujo a considerar como una especie de falta de honradez intelectual todo lo que yo produjese que no estuviera some-

mático en sus análisis de validez y de fundamento. En la medida en que se califique de «psicologismo» toda tendencia a resolver cualquier problema lógico o matemático valiéndose de resultados tomados de la psicología, suscribimos igualmente sin vacilar la condena del psicologismo, dado que no sólo revela una confusión de métodos, sino hasta de los problemas mismos. En efecto, mientras que, frente a una demostración matemática, el problema lógico consiste en investigar en qué condiciones cabe tenerla por válida, el problema psicológico no reside en otra cosa que en determinar por medio de qué mecanismos mentales se va desarrollando realmente en el espíritu del matemático. Estos dos distintos problemas, uno de fundamento y otro de explicación causal, corresponden, por otra parte, a dos métodos heterogéneos: uno de análisis deductivo y el

---

tido a la fiscalización de los dos métodos de comprobación que me parecieron entonces válidos: o la de los hechos, si bien subordinada a una experimentación personal, de suerte que no consistiera, sin más, en una reflexión sobre trabajos ajenos, o la fiscalización deductiva, pero subordinada a logaritmos precisos, como los utilizados en matemáticas o en lógica simbólica.

En lo que se refiere a la lógica, es preciso añadir además lo siguiente: en mi época de Instituto, y bajo la influencia de Bergson, creía que los procesos vitales eran de índole irreductible a las estructuras lógico-matemáticas; pero luego, reflexionando sobre la noción de «especie» y la clasificación biológica en general, y, más tarde, en especial, al aplicar los métodos biométricos a la variabilidad de mis moluscos terrestres, me convencí de la estrecha vinculación entre las estructuras orgánicas y las lógicas o matemáticas.

En resumen: tras esta especie de conversión a la inversa o «desconversión» respecto de la especulación filosófica, y resuelto a no otorgar ya confianza a nada sino a la experimentación y el cálculo (biométrico o lógico), me convencí de que, dada la falta de toda clase de informaciones sobre la filogénesis del conocimiento en general, así como sobre la sociogénesis prehistórica de los conocimientos humanos, para construir una epistemología biológica era necesario que me dedicase a hacer algo equivalente en un análisis embriogenético, y que estudiase, ante todo, el nacimiento de la inteligencia y el desarrollo de las principales operaciones intelectuales en el niño. En aquel entonces calculaba que habría de consagrar cinco años a tales estudios previos, y que luego podría volver a los problemas generales; pero lo previo me ha ocupado durante cuarenta años, y apenas hace diez que he podido atacar la epistemología bajo el ángulo que me había propuesto adoptar, es decir, el genético. De ahí que le esté particularmente agradecido a un lógico tan profundo y crítico como E. W. Beth por darme ocasión de confrontar mis ideas con las suyas en lo que se refiere a problemas tan centrales como los de la epistemología lógica y matemática y los de las relaciones entre el pensamiento real y la lógica formal.

otro de comprobación o experiencia, de modo que se comprende fácilmente el fracaso de todo psicologismo.

Dicho esto, y habiendo admitido, pues, la separación entre los dos dominios, es menester preguntarse si esta independencia de la lógica (o de las matemáticas) con respecto a la psicología es recíproca. Pues si bien, por las mismas razones por las que el lógico no se ocupa de los mecanismos mentales, es indudable que no tiene por qué intervenir en psicología para enunciar o resolver los problemas de explicación que ésta se plantea, cabe, en cambio, que se lo llame para juzgar acerca de la validez o falta de ella de una teoría psicológica deductiva, si es que el psicólogo recurre a semejante instrumento[2]; y, *a fortiori*, el matemático puede verse obligado a estimar la validez de tal o cual aplicación psicológica de una teoría estadística. En resumen, si bien el dominio de la lógica es el de la validez formal, este dominio, por una parte, tiene una extensión ilimitada, y sólo el lógico puede ser juez en cuanto a lo que ha de quedar englobado en él, incluso cuando se trate de teorías psicológicas por su contenido; pero, por otra parte, es un dominio delimitado en comprehensión, de forma que es imposible zanjar una cuestión de hecho o de interpretación acerca de la naturaleza de los mecanismos mentales en nombre de la validez formal.

Así presentada, la independencia de la actividad lógico-matemática con respecto a la psicología es completamente recíproca: en cuanto a la comprehensión, el campo psicológico está perfectamente delimitado, dado que se refiere exclusivamente al mecanismo real de los procesos mentales, y ello basta para prohibir toda aplicación de la psicología a cualquier problema de validez formal; pero en extensión constituye un campo en principio ilimitado en lo que concierne a las actividades humanas (por no hablar ahora de la psicología animal). Así pues, será el psicólogo quien habrá de decidir si, por amor de sus interpretaciones, se limitará a estudiar razonamientos falsos o incompletos, o si le interesan también, desde el punto de vista de los mecanismos reales del pensamiento, los raciocinios

[2] Ejemplo: la formalización de las teorías de Hull llevada a cabo por Fitch.

que el lógico considera válidos. Y también le compete a él determinar si es únicamente la intuición lo que suscita cuestiones psicológicas o si la formalización las plantea asimismo mirada bajo el ángulo de los mecanismos mentales, incluso en caso de que los mecanismos correspondientes a la formalización no se actualicen más que una reducida *élite* de «sujetos», que serían los lógicos en cuanto seres vivos y pensantes. Dicho brevemente: también el dominio psicológico tiene una extensión ilimitada, pero en lo que se refiere a explicar causalmente, y no a «fundamentar», problema este último que caracteriza el dominio lógico.

Como este reparto de tareas excluye todo tipo de conflicto, sucede que la eliminación de todo psicologismo es tan ventajosa para la psicología como para la lógica. Puesto que lleva a plantear un problema fundamental para la óptica de los mecanismos reales del pensamiento (problema que es precisamente aquél desde el que vamos a partir aquí): ¿cómo explicar psicológicamente la posibilidad de una lógica y de una matemática «puras» (debiendo tomarse el término de posibilidad en el sentido de realización posible, y no en el de validez posible, y significando simplemente con el término «puras» independientes de todo contenido)?

Si planteamos de golpe semejante problema ello no es solamente porque creemos poder esbozar una solución en el plano psicológico, como veremos en el capítulo 9: también lo hacemos porque es conveniente precisar desde el comienzo cuáles son nuestras posiciones fundamentales, con objeto de adelantarnos a todo malentendido del lector lógico o matemático, cuyas ideas preconcebidas acerca de la psicología le lleven a creer que nuestro rechazo del psicologismo ha de estar acompañado de pesar y que le seguirá alguna media vuelta implícita o inconsciente.

Ahora bien, podemos resumir en una palabra tales posiciones: frente a lo que opinaba Pasch, según el cual «el pensamiento matemático avanza en dirección contraria a la naturaleza humana», todo cuanto nos ha enseñado el estudio del desarrollo de la inteligencia lleva a creer, a la inversa, que el avance más allá de la intuición empírica (e incluso de la pura) que

se consigue afinando los métodos deductivos, por artificiales que puedan parecer a menudo, se inscribe en la prolongación «natural» de otros muchos avances orientados en el mismo sentido. La ilusión de Pasch sobre la «naturaleza humana» proviene, simplemente, del hecho de que, como tantos otros autores, juzga acerca de ella basándose en observaciones demasiado breves sobre otros adultos, o en una introspección incompleta: si, como hoy nos ocurre, hubiera estado en posesión de cierto número de datos sobre las transformaciones de la actividad lógico-matemática entre el primero y el décimoquinto años de actividad mental, tal vez habría comprendido que el axiomatista Pasch se encontraba mucho más en la línea de semejante desarrollo que su «naturaleza humana» —tal y como él se la representaba, sin poder tomar conciencia suficiente de las leyes profundas de su propio despliegue genético.

Pues es preciso comprender perfectamente, y comprenderlo desde el comienzo mismo, que la psicología genética del pensamiento real, por más que emplee métodos experimentales, no conduce necesariamente ni al empirismo ni siquiera al intuicionismo. No al empirismo porque, si bien ciertas experiencias son, acaso, indispensables al sujeto para desencadenar su actividad lógico-matemática, no son experiencias cuyos resultados provengan de los objetos (como sucede con la experiencia física), sino que extraen aquéllos de las acciones u operaciones aplicadas a estos objetos; cosa que no es, en modo alguno, exactamente lo mismo. Y esta concepción operatoria de los comienzos de la actividad lógico-matemática no conduce necesariamente al intuicionismo, ya que el proceso de elaboración de las estructuras no es solamente «progresivo» en cuanto que conducente a la construcción de nuevas estructuras: también es —y correlativamente— «reflexivo», en cuanto que necesita constantemente reelaborar las estructuras anteriores y reorganizarles sobre una base más amplia. De lo cual se sigue que la corriente de pensamiento que sustituye la intución operatoria por los procesos hipotéticos-deductivos se encuentra ya inscrita en la línea del desarrollo en unos estadios relativamente elementales, y que la inversión de perspectiva que termina en las refundiciones axiomáticas y en la formalización no tiene nada de an-

tinatural, sino que, por el contrario, se nos muestra como algo tan «natural» como las construcciones preaxiomáticas.

Creemos, pues, que una psicología de la inteligencia prolongada suficientemente en dirección genética proporciona un cuadro de las formas del pensamiento completamente distinto que la psicología ordinaria, y que antes justifica el antipsicologismo de los lógicos —tanto más cuanto que éste se suele inspirar en una psicología en general no genética— que se opone a él.

Así pues, nuestro papel en la segunda parte de esta obra no consiste, en modo alguno, en oponernos a esta o aquella concepción de E. W. Beth, sino únicamente en buscar la explicación psicológica de las posiciones que el lógico se ve obligado a adoptar en virtud de sus investigaciones sobre los fundamentos (explicación que, como veremos, se transforma incesantemente en una especie de puesta en correspondencia psicológica [3]). En efecto, las creaciones de los matemáticos y de los lógicos suscitan a la psicología unos problemas que podrían compararse, en términos bastante generales, con los que plantean las creaciones normativas de los juristas a la sociología jurídica: pues la sociología es, igual que la psicología, una ciencia de hechos, sin competencia normativa, mientras que tanto el derecho como la lógica son disciplinas normativas (que pueden adoptar una forma llamada pura, como el normativismo de H. Kelsen). Mas ha terminado por llegarse a un acuerdo distinguiendo las normas mismas, que la sociología del derecho no estudia, de los «hechos normativos», es decir, de las comprobaciones de hecho según las cuales tal o cual sujeto construye o acepta esta o aquella norma; y entonces se puede constituir una ciencia explicativa de los hechos normativos sin interferir con la creación de normas, pero manteniéndose en correspondencia con ella. De análoga manera puede concebirse una psicosociología de las creaciones musicales, poéticas, etcétera, que trataría de explicarlas, sin por ello legislar en las cuestiones de estética, exclusivamente referentes a las creaciones mismas. Con este mismo espíritu, de separación radical entre las cuestiones de validez o normativas y las de hecho o de gé-

[3] No en el sentido de una incursión por los problemas de la validez, sino en el de una explicación causal de los procesos que conduzcan a tal o cual paso efectuado por el pensamiento.

nesis causal, es como únicamente cabe intentar una interpretación psicológica de las matemáticas o de la lógica, interpretación que no consistirá, en modo alguno, en someter a examen estas disciplinas, sino únicamente en intentar comprender en virtud de qué procesos genéticos se explican tales o cuales construcciones, incluidas las orientadas en dirección de los fundamentos.

Pero si semejantes intentos tienen alguna probabilidad de éxito, ¿no terminarán por duplicar inútilmente el análisis de los fundamentos con un análisis genético que sea mero eco de aquél, lo mismo que el coro antiguo repetía las palabras pronunciadas por los verdaderos actores? Nada de eso: cualquier correspondencia que se encontrase entre las estructuras implicadoras utilizadas por la actividad lógico-matemática y las estructuras causales o genéticas sería sumamente instructiva para la epistemología genética, incluso en caso de que fuese solamente una correspondencia parcial o que no afectase sino a ciertos aspectos particulares. Si se pudiera encontrar la prueba experimental de que la fuente de las tendencias propias de la lógica está ya en las actividades del sujeto, habría que atacar de nuevo todos los problemas del platonismo, del conceptualismo o el nominalismo, y del apriorismo o el empirismo; dicho con más precisión, los trabajos acerca de los fundamentos conducen a buscar en los conocimientos lógico-matemáticos un punto de partida universal, pero, desde el punto de vista psicológico, las actividades del sujeto que hacen posible semejante análisis normativo aparecen, por el contrario, como el punto de llegada de un largo proceso genético; y una epistemología que procure conciliar estos dos aspectos de deducción normativa y de explicación genética sin caer en un círculo vicioso apenas se podrá orientar en otra dirección que en la de una especie de dialéctica que sustituya el apriorismo estático por la idea de una construcción continua, a la vez progresiva y reflexiva, en la que la intuición de las evidencias no tenga necesariamente primacía, sino que reserve una parte preponderante a la formalización (concebida como instrumento que se ha hecho indispensable merced al desarrollo histórico mismo del análisis regresivo).

7 LAS LECCIONES DE LA HISTORIA DE LAS RELACIONES ENTRE LA LOGICA Y LA PSICOLOGIA

§ 41. **Las tres etapas de la historia de las relaciones entre las investigaciones lógicas y las psicológicas.**—Es un hecho instructivo para la epistemología en general que las ciencias deductivas se hayan constituido mucho antes que las experimentales; pues aunque las matemáticas hayan pasado por una fase empírica (en Egipto constituyeron, por lo demás, más bien una técnica que una investigación con vistas a fines propiamente científicos), llegaron con los griegos a un nivel de elaboración muy superior al de la física. En efecto, mientras que los *Elementos* de Euclides proporcionaron un modelo de deducción axiomática que durante largo tiempo se ha considerado suficiente, la física griega no consistió más que en una sistematización de los datos del sentido común (la física de Aristóteles), en algunos resultados muy parciales presentados en forma deductiva y no experimental (la estática de Arquímedes) y, además de ello, en diversos ensayos de mecánica celeste ajenos a la experimentación propiamente dicha. De hecho, fue preciso llegar al siglo XVII (pese a algunos precursores de finales de la Edad Media y del Renacimiento) para que se constituyese una física que presentase una autonomía metodológica comparable a la que hoy manifiesta.

Esta distancia entre la experiencia y la deducción es todavía más sorprendente en la historia de las relaciones entre la lógica y la psicología, dado que el requisito de una experimentación detallada y sistemática se ha impuesto todavía más tarde en el dominio de la vida mental que en el de las leyes de la

materia. La razón de que así haya sucedido es, sin duda alguna, que se sienten ciertas dificultades para considerar necesaria la experimentación en una esfera en la que cada cual cree conocer directamente el pormenor de los fenómenos por simple introspección (razón que sigue gravitando muy pesadamente, ya no sobre los psicólogos mismos, pero sí sobre la idea que de la psicología se hacen los no especialistas). Y a ello se debe que la psicología científica no haya aparecido hasta el siglo XIX, en tanto que se puede hacer remontar a Aristóteles la lógica en cuanto disciplina sistemática, por más que la lógica simbólica, en el sentido en que hoy la entendemos, tampoco empezara a tomar vuelos hasta el siglo XIX; pues si se siente la tentación de sincronizar las dos historias sosteniendo que la lógica siguió siendo filosófica hasta el siglo pasado de igual modo que la psicología era instrospectiva, y que la primera se volvió matemática en la misma época en que la segunda se hizo experimental, queda el hecho de que la lógica griega no estaba manchada por error alguno (pues, contra lo que se ha supuesto algunas veces[1], para Aristóteles era obvia la necesidad de premisas existenciales para *darapti, felapton, bamalip* y *fesapo*), sino que, simplemente, era incompleta, en tanto que ninguna de las tesis de las múltiples psicologías filosóficas habidas continúa siendo utilizable en psicología experimental. Y así ha sucedido que durante muchísimo tiempo se ha considerado como acabada la lógica griega, sin sospechar su carácter parcial y atendiendo sólo a su validez.

Ahora bien, este adelanto de la lógica sobre la psicología, juntamente con el hecho del carácter tardío del simbolismo y de la formalización, en el sentido contemporáneo de esta palabra, han tenido como resultado una indiferenciación inicial de las dos disciplinas, indiferenciación relativa que duró, de hecho, hasta los comienzos de la constitución del álgebra de la lógica y de los trabajos de psicología experimental.

Cabe asignar dos razones complementarias a esta indife-

[1] Para Aristóteles, un postulado general de la lógica es el carácter no vacío de todo término; opinión que defendió al responder a las objeciones de Eubúlides (paradoja del *cornutus*). Se trata, pues, simplemente, de una diferencia de usanza con respecto a la lógica contemporánea.

renciación propia de los períodos iniciales. En lo que se refiere a la lógica, y dado que el método de Aristóteles era intuitivo y estaba subordinado a la evidencia subjetiva, se pensaba que, por eso mismo, la descripción de las formas de los juicios y razonamientos verdaderos alcanzaba a las formas del pensamiento natural; y por el lado de la psicología, la ausencia de toda experimentación sistemática sobre los mecanismos reales y, especialmente, genéticos del pensamiento, junto con la primacía de la introspección, conducían, recíprocamente, a no recoger más que el aspecto normativo del pensar del sujeto (aspecto que, efectivamente, existe) y a contentarse, en consecuencia, con la descripción de los lógicos para caracterizar las formas reales de las actividades cognoscitivas del sujeto.

Semejante situación duró hasta los comienzos de la lógica matemática y de la psicología experimental. Así, el creador de la célebre álgebra que lleva su nombre, G. Boole, intitulaba aún en 1854 «Las leyes del pensamiento» a su segunda obra de lógica, mientras que durante mucho tiempo todavía los tratados de psicología se contentarían, en lo que se refiere a la psicología del pensamiento, con describir sumariamente los conceptos, juicios y raciocinios sacados de la lógica clásica.

Estos residuos de indiferenciación posterior a la separación de las dos ciencias, que estaban ya caracterizadas por métodos propios (la matematización y la formalización en cuanto a la lógica, y la experimentación sistemática en lo que se refiere a la psicología), han llevado a dos tipos de desviaciones recíprocas, a las que se denomina «psicologismo» en lógica y «logicismo» en psicología.

El psicologismo es la tendencia a zanjar las cuestiones de validez mediante consideraciones de hechos; dicho de otro modo, la tendencia a sustituir los métodos puramente deductivos de la lógica por otros en los que entren datos psicológicos. En el capítulo 2, Beth ha mostrado el fracaso de tales tentativas desde el punto de vista lógico.

Recíprocamente, el logicismo es la tendencia a introducir consideraciones sacadas de la lógica, y, por tanto, de una disciplina cuyo objeto depende de la validez deductiva, y no de cuestiones de hecho, en el contexto de las explicaciones causa-

les que la psicología trata de fundar únicamente en la experiencia. El mejor ejemplo de logicismo es el de ciertos representantes de la «*Denkpsychologie* [psicología del pensamiento]» alemana (escuela de Würzburg, etc.), que desde Marbe y Külpe a K. Bühler y Selz, trató de llegar a los mecanismos del pensar por un método de introspección provocada, y no valiéndose de métodos genéticos. Reaccionando contra los decepcionantes resultados del asociacionismo, que reducía toda la inteligencia a un complejo juego de asociaciones entre las sensaciones y las imágenes mentales que se juzgaban provenir de ellas, o de asociaciones entre imágenes, los psicólogos de Würzburg tuvieron el mérito de querer fiscalizar los papeles efectivos de la asociación y de la imagen en los procesos mentales. Con tal fin se sirvieron de pruebas elementales (por ejemplo, pedían asociaciones de supraordinación o de subordinación, tales como, una vez pronunciada la voz «pájaro», que se encontrasen asociaciones de supraordinación como «vertebrado», «animal», etcétera, o de subordinación como «pato», «gorrión», etc.), a cuyo respecto acostumbraban a los sujetos a exponer una introspección todo lo pormenorizada posible sobre los procesos que ocurrían hasta llegar a la respuesta, sobre el papel desempeñado por imágenes, etc. De este modo obtuvieron ciertos resultados válidos (que Binet encontró también, por su parte, en Francia, siguiendo un método análogo e independientemente de ellos), entre otros, como principales, los dos siguientes: que el juicio no se reduce a una simple asociación, sino que constituye un acto intencional, y que la imagen no es un elemento del pensamiento, sino un simple auxiliar que no siempre está presente. Ahora bien, al restituir así su autonomía al juicio y al descubrir la existencia del pensar sin imágenes (afirmaciones o negaciones, relaciones, etc.), se vieron llevados a tomar posición en cuanto a las relaciones entre la psicología y la lógica; y como se colocaban en el punto de vista sincrónico del pensar adulto acabado y no desde el genético, se encontraban frente a sujetos que poseían ya cierta lógica (conforme, además, con la tradición colectiva media), en lugar de asistir a su construcción progresiva; de lo cual provino una oscilación entre dos posiciones, una francamente logicista y otra que lo era a medias.

La primera fue la de Marbe, quien, en la obra que se sitúa en el punto de origen de todos aquellos trabajos [2], llegó a una conclusión negativa (que recuerda la desengañada salida de Binet, «el pensamiento es una actividad inconsciente del espíritu»): la de que, pese a su intencionalidad general, el juicio no está acompañado por ningún estado de conciencia constante que pueda considerarse determinante suyo; y de ello deduce —momento en que puede hablarse de franco logicismo— que, además de los factores psicológicos que entren en juego, en el juicio interviene un «factor extrapsicológico», que sería el factor lógico. Ahora bien, semejante manera de plantear el problema suscita, a mi juicio, una considerable dificultad: pues la lógica no se ocupa más que de la validez de las construcciones noéticas, y no de su mecanismo causal, mientras que a la psicología no le concierne más que este segundo aspecto, y no el primero; de suerte que hablar del «factor» lógico que intervendría en los procesos psicológicos consiste en conferir una significación causal o de hecho a lo que no se refiere más que a la validez o a valores. Es cierto —y la existencia de este *tertium quid* es lo que motivó la postura de Marbe— que hay una lógica del sujeto distinta de la del lógico, y que la forma en que aquél valore como verdaderos o falsos sus propios juicios puede surtir efectos sobre su mecanismo causal. Pero hay que elegir entre dos cosas. O bien se pregunta uno si el sujeto tiene razón al considerar verdadero o falso tal o cual juicio o raciocinio, y entonces se está haciendo lógica; con lo cual será de la exclusiva competencia del lógico el saber si le interesa o no tal problema (a lo que hay que añadir que, con la matematización y formalización crecientes de la lógica, ésta se ha alejado progresivamente de semejantes cuestiones, dado que el pensamiento del sujeto es algo tan poco definido que apenas cabe decir sobre él nada preciso). O bien se consideran las evaluaciones que el sujeto haga de sus propios juicios como unos hechos más, entre otros, sin tener que decidir si el sujeto tiene o no razón, sino, simplemente, tomando nota de sus reacciones y tratando de analizar sus causas y sus efectos; y entonces las

[2] *Experimentell-psychologische Untersuchungen über das Urteil* [«Investigaciones de psicología experimental sobre el juicio»], 1901.

evaluaciones del sujeto no constituirán ya normas «lógicas» (en el sentido del lógico), sino «hechos normativos», lo cual es una cosa enteramente distinta: serían normas exclusivamente desde el punto de vista del sujeto, pero hechos desde el psicólogo. Es evidente que en lo que pensaba Marbe al hablar de «factores lógicos» era en estos «hechos normativos», pero vemos ahora la impropiedad de la expresión, puesto que no se trata de la lógica como tal, sino de la del sujeto, y que, si es que hay un «factor», ya no es extrapsicológico, sino que entra en el contexto causal en cuanto «hecho» normativo, es decir, como uno más entre los demás hechos.

La verdadera dificultad se encuentra en otra parte: reside en que, si se quiere explicar psicológicamente el juicio, la introspección es insuficiente. Pues con ella no se alcanza más que la conciencia, y ésta se somete, efectivamente, a normas, pero no nos informa sobre los procesos por medio de los cuales se acerca a ellas; así pues, para llegar al hecho normativo en tanto que hecho es indispensable situarlo en el conjunto del comportamiento y analizar éste desde un punto de vista genético; pero entonces la lógica del sujeto cesa de ser un «factor» para convertirse en un resultado.

Sin alcanzar, por fin, el análisis genético, el verdadero heredero de la «*Denkpsychologie*» de Marbe y de los würzburgueses, O. Selz, se situó en el punto de vista a que hemos aludido, el del comportamiento, y trató de analizar cómo llega el sujeto a encontrar la solución de los problemas (pero esta vez analizándolo desde el exterior). Esta investigación le condujo a una segunda posición, que se aparta del logicismo un poco crudo de Marbe, pero que nos parece todavía insuficientemente desligada de todo logicismo: la idea central de Selz es que cualquier problema constituye siempre una laguna en una totalidad, y que la solución consiste en colmarla mediante una especie de «*Komplexergänzung* [proceso de completar un complejo]». Observemos simplemente, sin necesidad de entrar en los detalles de los procesos invocados por este autor (actualización de un saber o de unos métodos, creación de métodos nuevos por abstracción a partir de otros antiguos, anticipación de la solución y combinación de las relaciones que permitan rellenar

el esquema anticipador, etc.), que llega a una especie de paralelismo lógico-psicológico: las combinaciones de las relaciones que permiten rellenar las lagunas obedecerían a leyes que reflejarían las de la lógica, de suerte que, en definitiva, el pensamiento sería un «espejo de la lógica».

No tenemos nada que oponer a que se busquen los puntos de enlace entre los mecanismos mentales y las estructuras lógico-matemáticas, ya que tal es, precisamente, nuestro objetivo; y, por otra parte, la idea de paralelismo conlleva un aspecto satisfactorio (que avanza notablemente sobre el interaccionismo de Marbe): el de que dos series paralelas no interfieren entre sí, lo cual parece garantizar la doble autonomía de las normas lógicas y de las secuencias causales psicológicas. Mas ¿acaso viendo un paralelismo no se prejuzga la solución?; y ésta, en apariencia prudente, ¿no es excesivamente restrictiva y, a la vez, demasiado fuerte tanto para una como para la otra partes en juego?

La historia misma ha respondido a estas preguntas; en lo que concierne a la lógica, ya antes de que apareciesen las obras de Selz (1913 y 1922), y en cuanto a la psicología, posteriormente. En lo referente a aquélla, la axiomatización o formalización crecientes han hecho de ella una lógica sin sujeto; y si, por las exigencias mismas de esta técnica específica, los lógicos se han desinteresado totalmente de los mecanismos efectivos de la vida mental[3], la psicología se encontraría, a su vez, en un atolladero para encontrar en el pensamiento del sujeto el «paralelo» de las múltiples axiomáticas que caracterizan a las diversas lógicas o que permiten fundar de modo formalmente equivalente una sola y la misma lógica. En lo que respecta a las investigaciones de los psicólogos sobre la inteligencia y el pensamiento, se han orientado resueltamente por una vía genética, ya se trate, con la psicología de la *Gestalt* [«forma», o «figura»], de intentar reducir las estructuras lógico-matemáticas del sujeto a unas formas elementales de organización comunes a todos los niveles del desarrollo (cf. las tentativas de Wertheimer de reducir el silogismo, etc., a leyes de la *Gestalt*), o bien,

---

[3] Salvo, tal vez, Gentzen, así como Beth mismo con sus «cuadros semánticos».

con la tendencia a que nosotros estamos vinculados, se procuren explicar tales estructuras por medio de una construcción progresiva debida a las actividades del sujeto.

En resumen: tanto el psicologismo de Wundt, Erdmann, Sigwart, etc., que esperaban construir lógicas a base de psicología, como el logicismo de Marbe, Selz, etc., que querían encontrar en el pensamiento un calco de una lógica preestablecida, se nos aparecen hoy como fases residuales de la indiferenciación inicial de la lógica y la psicología. Por el contrario, el progreso, por un lado, de la lógica axiomática y, por el otro, de la psicología experimental está caracterizando un segundo período de la historia de sus relaciones: a saber, en el sentido de una separación gradual y, aparentemente, radical. Pues en la medida en que la lógica se ha orientado hacia el análisis de fundamentos y de las condiciones de validez, no podía hacer otra cosa, verdaderamente, que desligarse de cualesquiera consideraciones de hechos; pero la psicología estudia el pensamiento en tanto que sistema de hechos, en su contexto causal, y ello aun cuando el sujeto se confine, en su conciencia, a consideraciones normativas. Por otra parte, en la medida en que la psicología se ha orientado hacia tal estudio de hechos, y por más que el psicólogo obedezca en sus métodos a normas y haya de plegarse a reglas lógicas y matemáticas, no podía, recíprocamente, sino desligarse de la lógica, ya que ninguna consideración de validez deductiva basta para zanjar problema alguno de hechos, que depende exclusivamente de la experiencia.

Sin embargo, ¿es definitivo tal divorcio? No soñamos, en modo alguno, al plantear esta pregunta, con anticipar nada, ya que la historia de las ciencias muestra suficientemente que la mayoría de las profecías han quedado desmentidas (recuérdense las de Auguste Comte, etc.); pero cuando uno se coloca en el punto de vista de disciplinas que, como la epistemología, precisan simultáneamente resultados lógicos y datos psicológicos, continúa siendo menester preguntarse cómo coordinar los dos tipos de análisis. Por consiguiente, y sin poner en tela de juicio la separación, sigue habiendo, a pesar de todo, un problema de coordinación; y en este sentido es en el que hemos de intentar sacar las lecciones del despliegue histórico, algunas de cuyas etapas acabamos de recordar muy esquemáticamente.

§ 42. **Necesidad de una coordinación.**—Habiendo admitido, pues, que el campo de la lógica es el de los fundamentos o de la validez, y que el de la psicología es el de la explicación causal y genética, semejante separación excluye todo conflicto entre competencias, pero plantea, a su vez, un problema de coordinación, que es el que vamos a examinar ahora.

I. Partamos de la comparación, en parte legítima, que introduce E. Zilsel entre las reglas de la lógica y las del juego del ajedrez. El psicologismo —sostiene así este autor— comete el mismo error del que sería víctima un jugador que quisiera decidir qué problemas pueden resolverse o no y cómo resolverlos apoyándose en consideraciones históricas y psicológicas que expliquen la formación del juego del ajedrez. Tiene toda la razón. Mas una vez admitido esto, sigue habiendo dos clases de problemas:

1) El jugador de ajedrez acepta el código de las reglas de juego: tenemos aquí un hecho psicológico, y no una norma. Sin ocuparse de la norma misma, que concierne únicamente a los jugadores, cabe preguntarse por qué la aceptan: el decir que han aprendido a jugar constituye una primera respuesta, pero se refiere de nuevo a una cuestión de hecho (podrían asimismo haber tenido un conocimiento innato de ella, descubrirla por intuición directa, etc., soluciones todas de que podemos prescindir aquí) y, además, es insuficiente, porque sigue sin comprenderse por qué el jugador aplica las reglas así aprendidas y las tiene por válidas: si es por pura convención, por obligación (pero, en este caso, ¿de dónde provendría ésta?), etcétera. Una vez más nos encontramos con cuestiones de hechos.

2) Una vez resueltas estas cuestiones (que no son tan sencillas), se plantea necesariamente un segundo grupo de problemas: desde el momento en que las reglas del juego entran en acción en el comportamiento o en el pensamiento del sujeto, intervienen en tanto que hechos o causas en el contexto de tales actos. La cuestión no se halla, en modo alguno, en que éstos incluyan semejantes leyes y sean válidos, o en que tal cosa no ocurra; sino que en cuanto el sujeto los reconozca como válidos, *ipso facto* se convertirán en «hechos normativos»

desde el punto de vista del observador: es decir, que, sin ocuparse de su posible validez, éste comprueba que estas normas modifican la conducta del sujeto en la medida en que éste las tenga por válidas. Así pues, es indispensable, para explicar esta conducta, que el observador se pregunte de dónde vienen tales hechos normativos; cosa que equivale a preguntarse cómo se explican las reglas del juego, pero no en tanto que válidas o no, sino como reglas modificadoras de la conducta del sujeto. En primera aproximación se contestará, naturalmente, que, puesto que esta institución particular y limitada no se ha impuesto ni con el carácter sagrado de la religión ni con el carácter imperativo de la moral ni el coercitivo del derecho, ni siquiera con el de *consensus* enormemente general de los usos lingüísticos, etc., es preciso, para explicar su éxito, que ofrezca alguna armonía o acuerdo con ciertas tendencias bastante constantes de la inteligencia y de la afectividad de los individuos a un nivel determinado de su desarrollo: por ejemplo, el ajedrez satisface cierta tendencia combinatoria, acerca de la cual habría que determinar todavía si en sí misma es innata o adquirida, y, en este último caso, si la adquisición se realiza por experiencia individual o por transmisión social.

En una palabra, si se trata de construir la lógica o el álgebra del ajedrez, la psicología y la sociología (y, por tanto, en general, la historia) carecen de competencia, y pretender lo contrario sería caer en un abusivo psicologismo, puesto que sería confundir los hechos con las normas. Por el contrario, si se quiere edificar una filosofía o una epistemología del ajedrez, esto es, situarlo en las relaciones entre las actividades del sujeto y la «realidad» o las «realidades» (física, social, etcétera), las cuestiones de hechos son tan importantes como las de validez o de derecho, y sería caer en el exceso contrario atribuir al lógico o al matemático del ajedrez la competencia necesaria para zanjar tales cuestiones; pues los datos psicosociológicos son entonces tan pertinentes como las consideraciones normativas.

Dicho esto, volvamos a las relaciones entre la psicología y la lógica o las matemáticas. En caso de que se trate de saber si es verdadera una demostración o es válido un sistema axiomático, y, sobre todo, de por qué son —respectivamente— ver-

dadera o válido, no hay consideración alguna de hechos que responda a tales cuestiones: incluso aunque el psicólogo intentase demostrar que, de hecho, al 100 por 100 de los sujetos corrientes les parecía verdadera la demostración (o hasta al 100 por 100 de los sujetos especializados en la cuestión), ello seguiría sin probar nada, pues al día siguiente podría surgir una persona genial que demostrase la insuficiencia de la demostración y la necesidad de reemplazarla por otra. Pero en caso de que, por el contrario, se trate del problema epistemológico consistente en determinar si las realidades lógico-matemáticas dependen de la realidad física, de las actividades del sujeto, del lenguaje exclusivamente, de estructuras sintéticas *a priori* o de un universo de ideas permanentes que subsistan independientemente del sujeto y del mundo físico, bastaría la mera comprobación de la persistente diversidad de opiniones entre los lógicos y matemáticos mismos para sugerir (sin, naturalmente, llegar a demostrarlo) que la cuestión no depende ya de simples consideraciones normativas, sino que implica una coordinación entre los problemas de normas y ciertos problemas de hechos. Esto es lo que queremos examinar ahora.

Vamos a partir con tal objeto de la hipótesis máxima: la lógica y las matemáticas no deberían nada al sujeto, pues serían reflejo de un mundo de universales subsistente en sí fuera del tiempo y totalmente autosuficiente. En esta platónica perspectiva las consideraciones normativas parecen adquirir el *máximo* de independencia con respecto a las cuestiones de hechos, ya que todo sistema verdadero participará directamente del mundo de las Ideas, sin deberles nada ni al sujeto ni al universo físico.

Un platonismo semejante es corriente entre los lógicos y matemáticos, si bien, en general, en una forma más débil, que consiste, simplemente, en admitir la independencia radical de los sistemas normativos o formales con respecto a lo real, sin pronunciarse acerca de la esfera de existencia de tales verdades lógicomatemáticas; pero no pronunciarse equivale implícitamente a atribuirles una zona de existencia distinta de la subjetiva, física, lingüística [4], etc.

[4] Excepto en caso de filosofía lingüística explícita, como sucede con Ayer.

Los problemas que plantea esta hipótesis se reducen, entonces, a dos principales: 1) ¿cómo tiene acceso el sujeto al mundo de las Ideas? (que es un problema de hechos, y ya no de normas), y 2) ¿cómo comprobar la hipótesis de la existencia de semejante universo sin referirse a una solución dada del problema 1), es decir, sin referirse a problemas de hechos?

Para resolver el problema 1), que es el de la naturaleza de la «reminiscencia» platónica, se apela, ya sea a diversos tipos de intuiciones «puras», ya a lo que B. Rusell llamaba, en la primera fase de su carrera, la «concepción» (frente a la «percepción»); o bien se limita uno a decir que el matemático «descubre» las nuevas verdades en lugar de «inventarlas». En cualquier caso, es obvio que se suscitan problemas psicológicos (sobre los que volveremos más tarde); mas cabría pensar que si bien interesan a los matemáticos en cuanto sujetos individuales, son ajenos a los problemas epistemológicos, ya que la validez de una intuición, una concepción o un descubrimiento no dependen de su interpretación psicológica; no obstante lo cual, con el problema 1) se plantea una cuestión de coordinación entre norma y hecho: ¿cómo se puede saber si el proceso real de descubrimiento ha bastado o no para alcanzar el universo de las verdades permanentes? Si semejante cuestión no consiste más que en decidir entre la validez o la falta de validez de tal «descubrimiento», el proceso psicológico no entra en juego, pero entonces no se tiene derecho a hipostasiar la verdad descubierta situándola en un mundo de Ideas; pero si, por el contrario, se admite la hipóstasis, ¿cómo es posible dar cuenta del contacto entre el mundo de las Ideas y ese sujeto de carne y hueso que es su inventor o «descubridor»? Dicho de otro modo, ¿cómo se puede saber que aquel proceso mental basta para establecer el enlace y no proporciona simples aproximaciones más o menos lejanas?

Con lo cual llegaremos al problema 2): para pasar del dominio de la pura validez (problema lógico) al de las hipótesis sobre la permanencia de las Ideas (problema epistemológico que involucra un aspecto ontológico) no basta con utilizar las reglas de validez lógicomatemáticas, que se refieren a la deducción y no afectan a las cuestiones de existencia más que en un

sentido limitativo. En efecto: cuando un lógico o un matemático confiere existencia a un ente abstracto, los criterios que puede emplear son, por orden de fuerza creciente, la simple no contradicción, la pertenencia a una clase, una decisión, una construcción en el sentido de Brouwer o una intuición *a priori* tal como la entiende Poincaré; y en lo que se refiere a las axiomáticas que empleen alguna lógica de orden superior, hay que añadir las condiciones relativas a la distinción entre modelos típicos y atípicos, así como a la categoricidad; pero, como ha hecho observar P. Bernays, estas formas de existencia garantizadas por el formalismo o por la actividad deductiva no son sino «*bezogene*», esto es, *relativas* a la existencia de cierto marco en que se encuadran y condicionadas por él; pero en lo que se refiere a la existencia del marco mismo, no depende de teoremas de existencia asentados por los métodos de una axiomática formal, sino que plantea problemas epistemológicos. Así pues, es preciso distinguir cuidadosamente de los problemas formales de existencia el que podríamos llamar problema de las zonas o esferas de realidad, que consistirá en distinguir, dentro del conjunto de realidades conocidas (realidad física, social, subjetiva, etc.) o concebibles (mundo de las Ideas) la que quiera caracterizarse y a la que se quiera dotar de existencia como apoyo de demostraciones válidas. A este respecto, el mundo de las Ideas no tiene significación más que en cuanto distinto del universo físico, del de las actividades del sujeto, del de las convenciones lingüísticas, etc., cosa que sitúa el problema más allá de las cuestiones de validez deductiva o constructiva. Ahora bien, cada uno de estos otros universos no puede alcanzarse más que a través de la mediación de unos procesos mentales perfectamente caracterizados (la percepción, el lenguaje, etc.), cuyo conocimiento de hecho (y, por tanto, psicológico) y cuya crítica son indispensables para que pueda elaborarse su epistemología; con lo cual hay que optar entre dos posibilidades: o bien el mundo de las Ideas tampoco es accesible más por mediación de ciertos procesos mentales, y hay que estudiarlos para estar seguro de que se diferencian de los precedentes (por ejemplo, para distinguir la intuición «pura» de las intuiciones empíricas, etc.), cosa que nos retro-

trae al problema 1), o bien se impone al sujeto sin que éste intervenga de forma ninguna, y entonces habría que explicar semejante misterio (cosa que supone, además, que se conozca al sujeto). En ambos casos, pues, queda excluido que una epistemología platonista seria tenga derecho a contentarse con introspecciones o especulaciones, de modo que habrá de recurrir a la psicología experimental —siquiera sea para prescindir de ella inmediatamente después.

Esto que acabamos de ver con respecto a cualquier epistemología platónica es igualmente válido acerca de cualquier epistemología apriorística de la lógica y las matemáticas, entendida en un sentido análogo al kantismo pero desligada de los detalles de la filosofía kantiana: cosa que sucede *a fortiori*, ya que no nos encontramos aquí con una hipótesis que separe el mundo de las Ideas de las realidades «subjetivas», sino de una disociación, dentro mismo de las actividades del sujeto, entre lo que constituiría las condiciones necesarias previas a toda actividad cognoscitiva (intuitiva o formal) y lo que sería el contenido adquirido, que habría que situar en tales formas *a priori*. En este caso, pues, el problema es algo más sencillo: si existen formas *a priori*, no podría imponerse su necesidad intrínseca exclusivamente a los sujetos especializados en las matemáticas y la lógica, sino que obligará también a quienes no posean más que las formas llamadas «naturales» del pensamiento, y ello a todos los niveles. Así ocurre que H. Poincaré, que atribuía a las intuiciones sintéticas *a priori* la iteración numérica $n+1$, así como la noción elemental de «grupo», se esforzaba por encontrar la iteración y el grupo de los desplazamientos también en las conductas más elementales del sujeto: ya a partir de los niveles sensorio-motores; y análogamente, en psicología, los autores que interpretan la teoría de la *Gestalt* en sentido apriorista, como W. Metzger, tratan a toda costa de encontrar en las percepciones espaciales las condiciones estructurales previas a toda experiencia. El averiguar si en el desarrollo del pensamiento se encuentran huellas de síntesis *a priori*, o si la necesidad no se alcanza más que al terminar las series genéticas, y no en su punto de origen, es, pues, una cuestión de hechos y de análisis experimental.

En la hipótesis según la cual se conciben las estructuras

lógico-matemáticas como extraídas de la realidad física por simple abstracción simplificadora, de acuerdo con el esquema aristotélico, las cuestiones de hechos son todavía más evidentes, y los propios epistemólogos matemáticos recurren a ellas por sí mismos. No hay ninguna figura geométrica —se nos dice, por ejemplo— que esté realizada en estado puro en el mundo físico: la llamada abstracción es, por tanto, una construcción que substituye la imperfecta figura percibida por una figura concebida perfecta. Tienen toda la razón; pero, en lugar de quedarse en semejantes trivialidades del sentido común, un estudio serio de las relaciones entre la percepción y la inteligencia, y, sobre todo, de los diferentes modos de abstracción (ya partan del objeto de las acciones concretas ejercidas sobre él), nos llevará a unos conceptos más precisos sobre las relaciones entre las estructuras lógico-matemáticas y la realidad física; y tales análisis de hechos fundados sobre la experimentación psicológica proporcionarán una crítica del empirismo y del psicologismo tanto mejor apoyada cuanto que se sitúa en el plano mismo en que se coloca el empirismo.

En lo que se refiere a las hipótesis nominalistas (en diversos grados) que vinculan las estructuras lógico-matemáticas con las del lenguaje, su adopción o su crítica supondrán, como es obvio, que se tome en consideración todo un conjunto de hechos. Ahora bien, éstos no son únicamente relativos al lenguaje real y al pensamiento verbal, ya que, para poder juzgar adecuadamente de lo fundado o infundado de una interpretación nominalista de las matemáticas, es asimismo indispensable que se determine en qué medida las estructuras transportadas y transmitidas por el lenguaje se encuentran, por otra parte, preparadas por la acción. De modo que la interpretación de las relaciones entre la lógica y el pensamiento natural será muy distinta según que los varios procesos de éste, orientados hacia las clasificaciones, las relaciones, la numeración elemental, etc., afecten sólo al lenguaje y no se adquieran más que por transmisión verbal o que se los encuentre en situaciones puramente sensorio-motrices, o en otras en las que la «función simbólica» no esté acompañada por un lenguaje articulado con mera transmisión del adulto al niño (por ejemplo, en el caso de los sordomudos).

II. Tratemos ahora de extraer la significación de estas observaciones introductorias. Puntualizaremos, en primer lugar, que vamos a llamar «dominio epistemológico» al de las relaciones entre los conocimientos y las distintas formas posibles de realidades (comprendida la eventualidad de que haya zonas de existencia no sensibles): si no fuese así, la epistemología no se distinguiría de la lógica; ahora bien, aunque la supone, abarca también un marco más amplio, en el que intervienen el problema del objeto y de su zona de realidad y el del papel del sujeto, incluso aunque se minimice su actividad. Pues en uno de los polos de las interpretaciones epistemológicas posibles, el objeto no es más que una parte o un aspecto del sujeto, y éste no conoce otra cosa, pues, que a sí mismo; mientras que en el otro polo se concibe el conocimiento como algo que se reabsorbe en el objeto, ya que el sujeto no tendría otro papel que el de borrarse en el acto del conocer; pero desde el punto de vista epistemológico hay siempre el problema del papel desempeñado por el sujeto. Por consiguiente, sin prejuzgar la solución, admitamos en primera aproximación que todo conocimiento supone un sujeto, un objeto y unas relaciones entre ambos, y distingamos además en el objeto sus propiedades y su tipo de existencia (en relación con el problema de las zonas de realidad). Nos encontramos, pues, ante tres sistemas y tres clases de relaciones entre ellos:

1) el sistema *S:* el de las actividades del sujeto,

2) el sistema *F:* el de las propiedades (formas, etc.) del objeto,

3) el sistema *E:* el de los tipos de existencia o de realidad del objeto[5], y

4) a 6) las relaciones *SF, SE* y *FE.*

---

[5] De acuerdo con la distinción que hemos introducido entre el sujeto y el objeto, cabe atribuir a éste varios tipos diversos de existencia; en cuanto al objeto en sí mismo, puede, por otra parte, corresponder a muy variados tipos de ella (física, platonista, etc.). Por consiguiente, la atribución al objeto de un tipo de existencia, cualquiera que éste sea, supone una elección dentro de un conjunto de tipos posibles; de suerte que, lo mismo que sucede con *S* y con *F,* el sistema *E* corresponde a un conjunto sistematizado.

Nos damos cuenta, por una parte, en lo que se refiere al conocimiento lógico-matemático, de que el sistema *F* es autónomo, es decir, que la lógica y las matemáticas alcanzan su objeto por vía de construcción deductiva, sin referirse previamente a ningún conocimiento del sujeto, *S*, ni del modo de existencia del objeto, *E;* y asimismo nos percatamos, por otra parte, de que el sistema *S* es autónomo (al menos parcialmente), es decir, que existen conocimientos psicológicos del sujeto por vía experimental sin referencia previa a *F* ni a *E*. En cambio, admitiremos que no hay ningún conocimiento independiente de *E*, o sea, que no existe «ontología» alguna que sea autónoma del modo en que lo son la lógica y la psicología: ya se interpreten las estructuras lógico-matemáticas por referencia a una intuición empírica, a una «intuición de esencias», etc., la elección del modo de existencia que se les atribuya es siempre relativa a una toma de posición acerca del sistema *S;* y, por otro lado, la existencia de todo ser lógico-matemático está condicionada por *F* (no contradicción o compatibilidad, categoricidad, etc.). Así pues, no hay ciencia alguna directa de *E* en el mismo sentido en que hay unas ciencias de *F* y de *S*, sino únicamente la posibilidad de una interpretación indirecta, solidaria de las relaciones *SE* y *FE* (y, por consiguiente, de *SF*): por ello nos proponemos llamar epistemológicos los problemas relativos a las relaciones dichas, *SF*, *SE* y *FE*, y al sistema *E*.

Intentemos, pues, puntualizar estas relaciones desde el punto de vista de las reglas metódicas que hayamos de utilizar[6].

---

[6] En este momento no buscamos otra cosa que asentar unas reglas metódicas que sirvan para guiar nuestros análisis ulteriores (de los capítulos 8 a 11); por lo cual elegiremos las más prudentes posible. Podría objetársenos, por ejemplo, que la separación entre la lógica y la psicología no es tan radical, dado que el lógico emplea metateorías en las que puede ocurrir que, frente a lo que acostumbra a hacer en la parte formal de la teoría, se refiera, en ocasiones, a las actividades del sujeto (en lo que respecta, por ejemplo, a las significaciones): tenemos un hermoso ejemplo de tal recurso a la actividad del sujeto dentro de la misma lógica en la condición de «mantener constantes las variables» en una demostración que haya de llevar a una fórmula de la forma $(x)A(x)$, según puede verse en KLEENE, *Introduction to metamathematics;* y recíprocamente, el psicólogo puede valerse de formalizaciones, refiriéndose de este modo a la lógica. Mas no por ello es menos verdad que, si bien el lógico apela así a consideraciones no formales, tal cosa ocurre en virtud del desarrollo espontáneo de su inves-

a) Toda afirmación de *F* es independiente de las afirmaciones de *S*, y ningún problema que se encuentre en *S* constituirá asimismo problema en *F;* lo cual es repetir una vez más que los datos de hechos son incapaces de intervenir en el dominio lógico-matemático.

b) Toda afirmación y todo problema de *F*, por el contrario, dan lugar a un problema de *S*, pero la solución en este último sistema de estos problemas no puede obtenerse más que por los métodos propios de *S*, y no por los deductivos métodos de *F*.

El que todo problema o afirmación de *F* constituya un problema de *S* proviene del hecho de que, por alejada que se encuentre la construcción lógico-matemática del pensamiento «natural» de los sujetos no lógicos profesionales, tiene por asiento —como *mínimo*— o por creadores —como *máximo*— cierto número de cerebros individuales de sujetos llamados Cantor, Frege, Beth, etc.; y, en consecuencia, por especializada que sea la afirmación de *F* que queramos, suscitará el problema de su comprensión por sus sujetos y sus lectores, el del mecanismo de su descubrimiento, el de la forma en que los sujetos lleguen a sentirse obligados por las normas, etcétera. Pero los problemas de este modo planteados en *S* no dan lugar, por su parte, a problemas de *F*, ni pueden resolverse por los métodos de este último sistema. Y al revés, es evidente que si en *S* se ataca un problema suscitado por *F*, es necesario que, para respetar los datos mismos del problema, las afirmaciones de *S* sean compatibles con las afirmaciones de *F*.

c) Toda afirmación de *E* ha de ser compatible con las

---

tigación normativa, que conserva, por tanto, toda su autonomía (cosa que, naturalmente, no impide que cualquier consideración de hechos concierna a una comprobación por los hechos); y recíprocamente, si al psicólogo le sucede que recurre a formalizaciones, lo hace para expresar mejor en forma rigurosa un contenido cuyo valor no puede imponerse más que con referencia a los hechos, por lo cual las comprobaciones de hechos siguen teniendo completa autonomía (cosa que, como es natural, tampoco obsta a que la formalización adoptada sea asunto, en cuanto a formalización, de la validez formal). En el capítulo 10 volveremos sobre tales posibles convergencias entre las investigaciones lógicas y las psicológicas; pero hubiera sido imprudente preverlas metódicamente, ya que ningún método debe prejuzgar los resultados a que pueda llevar.

afirmaciones de *F*, sin que éstas basten para decidir dentro de *E*.

En *E* no existe estructura alguna contradictoria (que es posible, sin embargo, en la realidad subjetiva de *S*), lo cual supone una jurisdicción de *F* sobre *E*, pero de naturaleza simplemente limitativa. En efecto, las afirmaciones de *F* no son suficientes para resolver los problemas de *E*, como es claro *a posteriori* por las diversas interpretaciones de *E* de los especialistas de *F*, y *a priori* por la irreductibilidad mutua de las cuestiones de normas y las de realidad o existencia (entendidas como cuestiones de «zonas de realidad», y no de existencia formal). Así pues, el dominio *E* se encuentra subordinado al *F*, pero sin constituir una prolongación unívoca de él; cosa que equivale a decir que no hay ninguna ontología dotada de la autonomía de la lógica y de la psicología, y que los problemas de *E* no dependen, pues, únicamente de *F* y *E*.

d) Toda afirmación de *E* depende asimismo de afirmaciones de *S*.

Cabe preguntarse por qué adoptamos esta regla, dado que existe otra contraria, la *a*), en lo que respecta a *S* y a *F*. Tenemos dos razones para ello. La primera es que el sujeto existe, y que el reconocimiento de otros tipos de existencia supone poner en relación estas distintas realidades, ya que un modo de realidad no significa nada si no es situado entre los demás; por el contrario, el hecho de que el sujeto sepa deducir con cierto grado de coherencia no afecta a las construcciones deductivas del lógico, ya que se trata de normas distintas y que cabe reconocer por válidas unas sin necesidad de las otras. En segundo lugar, todo sistema deductivo conlleva cierto grado de autoverificación, mientras que la admisión de una zona de existencia, o bien se refiere a consideraciones formales, que desempeñan a su respecto un papel limitativo, como hemos visto en *c*), o a afirmaciones sobre las posibilidades que tenga el sujeto de alcanzar cognoscitivamente aquella realidad.

De las reglas *c*) y *d*) se obtiene, pues, la regla sintética *e*):

e) Las afirmaciones de *S* no pueden determinar el sistema *E* sin recurrir a *F*, ni las afirmaciones en este último sistema pueden determinarlo sin recurrir a *S*.

Por tanto, es necesario «coordinar» las cuestiones de hechos de *S* y las normativas cuestiones de *F*, coordinación que está garantizada por las reglas *a*) y *b*), que bastan para eliminar todo conflicto (es decir, el psicologismo en lógica y el logicismo en psicología). Puntualicemos, sin embargo, la finalidad que se quiere lograr mediante tal coordinación.

f) Se trata de reunir los datos de hechos referentes a la actividad del sujeto (*S*) y a la existencia del objeto (*E*) de forma tal que no solamente sea compatible con la validez normativa de la relación cognoscitiva (*F*), sino que también explique cómo pueden imponerse de manera necesaria al sujeto (considerado en el nivel de su desarrollo en que sea apto para asimilarlas) las normas aplicadas en *F* al objeto.

Con otras palabras: la coordinación de las cuestiones de hechos y las normativas equivale a situar el conocimiento deductivo *F* en un marco de relaciones entre el sujeto y el objeto, sin desnaturalizar tal conocimiento, pero explicando la posibilidad de que funcione desde los puntos de vista de las actividades del sujeto (si bien quedará abierto el problema de saber si estas últimas desempeñan o no un papel formativo) y de la índole ontológica del objeto (si bien quedará abierto el problema de saber si éste se confunde con uno de los aspectos del sujeto o si le es exterior, en el grado que sea: en un universo sensible, social, lingüístico, ideal, etc.).

Creemos que de este modo se respeta la autonomía de la lógica y de la psicología, y a la vez se garantiza la coordinación de sus resultados en el terreno de la epistemología, cuyo problema consiste precisamente en explicar cómo son posibles los diversos tipos de un conocimiento (posibles en el doble sentido de su validez normativa y de su funcionamiento en lo real). Por tomar un ejemplo trivial: si bien la verdad de $2+2=4$ no es un dato de hecho, sino de demostración lógica, no por ello el problema epistemológico deja de seguir estando sin resolver cuando se contenta uno con mostrar por qué es válida la demostración; pues es preciso, además, saber qué «son» o qué «designan» los símbolos 2, 4, $+$ y $=$, así como qué es lo que hace el sujeto para someterse a la necesidad normativa de esta demostración; y decir que estos símbolos son

entes de razón, y que el sujeto no interviene para organizarlos (con lo que no sería sino el teatro de la demostración, y no uno de sus actores), es una solución epistemológica entre varias: hay otras soluciones posibles que también respetan esa autonomía normativa de la demostración, y para elegir entre ellas han de intervenir, siempre y necesariamente, los datos psicológicos. Así pues, coordinar los datos de hechos y las valideces normativas consistirá en poner en correspondencia unos y otras sin reducirlos entre sí en ninguno de los dos sentidos en que cabría efectuar tal reducción. Este respeto mutuo de los especialistas del hecho y los de la norma es sumamente difícil de lograr, pues todo psicólogo siente la tentación de atenerse a sus ideas, certeras o falsas, sobre la lógica, y todo lógico a las suyas, igualmente certeras o falsas, sobre la psicología; pero el problema epistemológico implica semejante coordinación sin reducción —lo cual es precisamente la razón de que progrese tan lentamente.

§ 43. **El punto de vista genético y el normativo.**—Acabamos de admitir que la investigación epistemológica conlleva la doble consideración de los datos normativos lógicos y de los datos de hechos psicológicos. Es preciso puntualizar ahora la índole de estos últimos.

Puesto que el problema psicológico que se plantea al respecto es el de explicar el papel del sujeto en el conocimiento, hemos de distinguir desde el principio dos tipos de hechos psicológicos, que hay que analizar por separado y cuya distinción es esencial para nuestro propósito: por una parte, los hechos de conciencia considerados desde el punto de vista del sujeto y de manera sincrónica o estática, es decir, a un nivel dado del desarrollo e independientemente de éste; y por otra, los hechos de conducta o de comportamiento mirados desde el punto de vista del observador y de manera diacrónica o genética, o sea, en función del desarrollo. Es cierto que cabe considerar los hechos de conciencia como sucesiones de acciones interiorizadas o anticipadas; mas esto es observarlos bajo el ángulo de la conducta y el del observador, en tanto que el sujeto los introspecciona desde otra perspectiva.

I. Un hecho fundamental, que complica —o simplifica, según las interpretaciones— las cuestiones de coordinación entre las investigaciones normativas del lógico y las experimentales del psicólogo, es que los hechos de conciencia llevan siempre consigo un aspecto normativo cuando se los mira desde el punto de vista del sujeto, por muy «ingenuo» que sea éste y alejado que se halle de las normas de la lógica científica o formalizada. Colocándonos ahora —es decir, en el presente apartado I— en el punto de vista sincrónico, o sea, sin indagar por el momento de dónde provengan las normas del sujeto (por transmisión educativa y lingüística, innatividad, adquisición individual, etc.), con lo cual quedarán abiertas todas las hipótesis al respecto, comprobamos, simplemente, que todo sujeto normal pensante y parlante —es decir, acerca de cuya introspección podamos informarnos (frente a lo que ocurre en los niveles sensorio-motores, anteriores al lenguaje)— construye inferencias y comprende las de los demás, y evalúa unas y otras como verdaderas o falsas, no solamente en lo que respecta a su acuerdo con lo real, sino desde el punto de vista de cierta coherencia interna (no contradicción).

Desde la óptica del observador, estas actitudes normativas del sujeto son hechos como cualesquiera otros, que no tiene por qué evaluar, sino que advertir y explicar. Por consiguiente, con objeto de evitar las posibles confusiones entre las normas y los hechos, vamos a hablar de «hechos normativos» para designar las comprobaciones de hecho (desde el punto de vista del observador) acerca de estados de conciencia o de conductas que conlleven un aspecto normativo mirados desde el sujeto.

Una segunda observación esencial, sobre la cual conviene insistir para precisar los métodos de análisis que vamos a utilizar, es la de que, contrariamente a lo que ocurre con los hechos de comportamiento, los de conciencia no caen dentro de la mayoría de las categorías habituales, aplicables a la realidad física, como son las de substancia, espacio, movimiento, fuerza, etc., ni, dicho de un modo general, la de causalidad. Pues si bien tales hechos se despliegan en el tiempo, no cabe decir, sin embargo, que sean unos «causas» de otros, ya que se entra-

ñan unos a otros de acuerdo con un modo de enlace de índole más noética o inferencial que causal. Su carácter fundamental es el de consistir en *significaciones* (desde el punto de vista cognoscitivo) y en *valores* (desde el afectivo); ahora bien, ni una significación es causa de otra, ni un valor de otro, sino que se entrañan unos a otros por medio de algo a lo que podría llamarse, a falta de una expresión mejor, una especie de implicación ingenua —tomando esto en el sentido corriente de «entrañar» [*entraîner*, lit. llevar consigo, arrastrar] y no en el técnico—. Así ocurre que el sujeto, al percibir un sólido, le atribuye partes no visibles (la parte de atrás del objeto) en cuanto «implicadas» por las visibles; y análogamente, el interés (valor) que se tenga por una finalidad entraña que se atribuya cierto valor a los medios conducentes a ella, etc. Los psicólogos antiguos describían esta relación fundamental a base de «asociaciones» (aunque, por lo demás, las asociaciones por semejanza y contigüidad tampoco se aplican a la realidad física, salvo en la perspectiva del pensamiento mágico, según hizo ver hace tiempo Frazer [7]); pero, en realidad, se trata mucho menos de asociaciones mecánicas que de asimilaciones activas, que son, precisamente, fuente de implicaciones en el sentido amplio en que acabamos de tomar esta palabra.

En resumen, los hechos de conciencia son, desde el punto de vista del sujeto, de naturaleza implicadora, y conllevan aspectos normativos. Tal es la razón por la que el psicologismo corriente sintió la tentación de reducir, sin más, las normas de la lógica a las «leyes del pensamiento», olvidando que entre la lógica «ingenua» del sujeto —en la medida en que quepa codificarla— y la del lógico media una distancia análoga a la que separa la «física ingenua» del niño de la del físico: de igual modo que la media de las opiniones espontáneas sobre la materia o la energía no dará lugar a ninguna ley física exacta, tampoco la media de las lógicas espontáneas proporcionará una lógica de lógico profesional. Y si queda abierta la cuestión (sobre la que volveremos en los capítulos 8 y 10-11) de saber si estas lógicas constituyen una primera aproxima-

[7] En su obra fundamental (*La rama dorada*), J. G. Frazer atribuye la magia a una proyección en lo real de las leyes de la asociación de ideas.

ción de la últimamente mencionada, también queda abierta la cuestión (sobre la que retornaremos en el capítulo 10, §§ 52 y 53) de saber si la lógica y las matemáticas axiomáticas se comprometen, como pensaba Pasch, en una dirección inversa a la marcha natural del espíritu.

II. Desde el punto de vista del observador, y ya no del sujeto, ha de considerarse la vida mental como un sistema de comportamientos o de conductas, en el que se comprehenderá el pensamiento interior, inconsciente o consciente, si bien mirándolo ahora como interiorización de acciones con simbolización, anticipaciones posibles, etc. Desde semejante perspectiva, el carácter esencial de la vida mental es su solidaridad con las acciones, y la inteligencia misma ha de concebirse como un sistema de operaciones, es decir —y esto es una definición—, de acciones interiorizadas, hechas reversibles y coordinadas entre sí en forma de «estructuras operatorias» que nos presentan leyes de totalidad en cuanto estructuras (leyes que el observador puede describir valiéndose de reticulados, grupos, etc., esto es, en el lenguaje del álgebra general)[8]. No cabe duda de que si se llama «operativo» —definición— a este aspecto del conocimiento, que es relativo a las acciones y a las operaciones, existe también un aspecto «figurativo», o sea —definición—, relativo a las configuraciones sensibles (por ejemplo, la percepción y la imagen mental); pero es fácil mostrar que, si bien los pasos figurativos dados por el conocimiento se refieren a «estados» de los objetos a conocer y los operativos a sus «transformaciones», los progresos del conocimiento en desarrollo consisten siempre en subordinar los estados, que se habían concebido inicialmente como aislados, a los sistemas de transformaciones; lo cual garantiza la primacía del aspecto operativo.

Dicho esto, lo propio de la psicología de la conducta, en oposición a la psicología introspectiva, es que acaba en una perspectiva genética o diacrónica, y es, de este modo, «explicativa» en el sentido de recurrir a ciertas formas de causalidad, en lugar de quedarse solamente en «comprensiva» (en el sen-

---

[8] Véase más abajo: capítulo 8, §§ 45-6 y 48.

tido de la comprensión de las significaciones y los valores, así como de sus implicaciones en sentido amplio).

Hay dos hechos que hacen ver inmediatamente que cualquier psicología de conductas se ve rápidamente obligada a adoptar una dimensión genética: 1) que un sistema dado de acciones o de operaciones no se constituye, en general, sino muy gradualmente (pues los sistemas ya montados del todo hereditariamente son poco numerosos, y ordinariamente tienen escasa importancia para el conocimiento, salvo en cuanto a algunos reflejos relativos al espacio sensoriomotor), y 2) que los distintos sistemas operativos se constituyen a niveles muy distintos del desarrollo y son fáciles de jerarquizar por orden cronológico.

Tomemos como ejemplo, para ilustrar los puntos 1) y 2), la forma en que se organizan en el sujeto las estructuras comparables a grupos de desplazamientos (en el sentido en que emplea H. Poincaré este concepto geométrico para describir las reacciones sensoriomotrices). Podemos decir que, en los niveles sensoriomotores anteriores al lenguaje, el niño pequeño llega a tal estructura cuando sabe desplazarse en su habitación o jardín coordinando desplazamientos sucesivos con posibilidad de retorno (compárese con las operaciones inversas) y de rodeos (compárese con la asociatividad). Mas esta estructura de los desplazamientos —ya sean propios o percibidos en objetos móviles, etc.— no es innata, ni siquiera precoz: durante los primeros meses ni siquiera se distingue entre los cambios de posición (desplazamientos) y los de estado (reabsorción del objeto, al que se concibe, como no permanente en cuanto sale del campo de la percepción), como tampoco hay localización en función de los desplazamientos sucesivos. Una vez adquirida la estructura de grupo para las rotaciones y las traslaciones simples en el plano de las acciones sensoriomotrices (de uno y medio a dos años), hay que esperar varios años (hasta después de los siete a ocho de edad) a que se aplique esa misma estructura, ya no sólo a los movimientos exteriores ejecutados en la acción, sino a los representados en el pensamiento: por ejemplo, de modo que se comprenda que cuando se hacen varias idas y venidas parciales entre *A* y *E* a lo largo de la recta que

los una (así, *AC, CB, BE, EA*) se habrá andado tanto de *A* a *E* como de *E* a *A* si es que el móvil ha partido de *A* y se encuentra al final en este mismo punto. Así pues, el grupo a base de operaciones mentales (incluso unas tan simplificadas como son los trayectos recorridos sobre una recta) es una cosa enteramente distinta que el grupo de acciones. Y, por fin, es preciso esperar a que se constituya un escalón superior de operaciones (de los once a los doce años) para que pueda resolverse un problema en el que intervengan movimientos relativos: por ejemplo, los desplazamientos de un caracol sobre una tablilla y de ésta con respecto a una referencia inmóvil, *A* (así, prever la posición del caracol con respecto a *A* si se desplaza de izquierda a derecha 20 centímetros sobre la tablilla, mientras que ésta se desplaza de derecha a izquierda otros 20 centímetros, etc.).

En una palabra, cualquier estructura (e incluso, en un caso particular, una representación muy sencilla y limitada del subgrupo de las traslaciones sobre una recta) no se constituye más que muy gradualmente, y es preciso reconstituirla otra vez desde el principio en tres escalones sucesivos al pasar del plano de las acciones (desplazamiento del propio cuerpo) al de las operaciones con un solo sistema de referencia y al de las operaciones con dos sistemas combinados.

Está claro, pues, que una psicología de las conductas que se vea así obligada a colocarse en una perspectiva genética se encontrará, por ese mismo hecho, frente a problemas de explicación causal. Por ejemplo: ¿cómo se puede explicar que aquellos desplazamientos sensoriomotores tiendan hacia una estructura que involucre la composición directa de los desplazamientos ($AB + BC = AC$, no estando *ABC* en línea recta), una composición inversa (retornos) y una asociativa (rodeos)? ¿Es innata tal estructura (acabamos de ver que no lo es)?; y si no lo es, ¿es asimilable a una simple sumación de experiencias físicas o procede de una equilibración progresiva de coordinaciones sensoriomotrices? ¿Por qué, una vez adquirida tal estructura, no se impone de golpe al pensamiento en cuanto éste es capaz de imaginar los desplazamientos? ¿Cómo se reconstruye en el plano del pensamiento, y por qué semejante reconstrucción exige una reelaboración de las intuiciones más elementales? (por ejemplo, entre los cuatro y los cinco años ni siquiera hay seguri-

dad de que el trayecto único *AB* equivalga en longitud al *BA*, especialmente si *A* y *B* se encuentran ubicados en un plano físicamente inclinado). ¿Por qué el progreso de las intuiciones del desplazamiento conduce de nuevo a una estructura de grupo?; etcétera, etc.

En efecto, ninguno de estos problemas admite solución por vía de deducción lógica, y ni siquiera cabe resolverlos apelando a los datos introspectivos de la conciencia del sujeto; pues ésta proporciona ciertas indicaciones a modo de síntomas, pero no la explicación. Se observa, por ejemplo, que a cierto nivel preoperatorio la transitividad no se impone a la conciencia del sujeto: después de haber comprobado que cierto trayecto *AB* viene a ser igual al *BC* y que este último se iguala al trayecto *CD*, el sujeto se negará a admitir que *AB* sea necesariamente igual a *CD;* en cambio, al nivel en que las operaciones se coordinan en una estructura de grupo, tal igualdad se impone como algo necesario: «tiene que ser así», etc. Así pues, de nada sirve saber que la transitividad corresponde a una norma formal para explicar que a partir de los siete a ocho años se imponga como norma aceptada por el sujeto: queda por comprender por qué no se imponía antes y cómo el sujeto se ha vuelto sensible a ella. Ahora bien, desde el punto de vista genético se encuentra ahí, una vez más, un problema de explicación causal, ya se lo resuelva apelando a las presiones educativas, lingüísticas, etcétera, ya se vea en ello el resultado de la compleción de una estructura debida a las equilibraciones sucesivas y espontáneas de las acciones y las operaciones del sujeto.

Este punto de vista genético, sobre el que nos importaba mucho insistir desde este capítulo introductorio, tiene gran importancia para el problema de las relaciones entre el pensamiento «natural» o real y la lógica formal, dado que desde un principio nos impide considerar el pensamiento natural como una entidad estática, obligándonos a concebirlo en la perspectiva a) de una sucesión de estadios, y b) de una jerarquía de niveles o escalones, cada uno de los cuales corresponde, en la arquitectura de una inteligencia adulta, a estudios sucesivos (de los que sería resultado o sedimento). De esta suerte, cada individuo normal ha pasado, en el curso de su formación: por estadios sensoriomotores, a lo largo de los cuales se han orga-

nizado las estructuras que constituyen los niveles —siempre presentes en el adulto —de sus acciones elementales; por estadios de operaciones «concretas» —en el sentido de que intervienen en la manipulación de objetos, si bien, posiblemente, junto con alguna representación de ésta—, en los que se han elaborado unas intuiciones operatorias que constituyen unos niveles superiores a los precedentes —y siempre presentes, como ellos—, pero inferiores a los que les siguen; por estadios de operaciones vinculadas a manipulaciones verbales e hipotético-deductivas, de las que surge un tercer grupo de niveles, etc.

Esta perspectiva de una serie de estadios sucesivos que se sedimentan en niveles jerárquicos superpuestos conduce, pues, a cierto número de consecuencias fundamentales, que vamos a analizar en el apartado III; y la principal de ellas es que, concebido así, el pensamiento «natural» no está acabado nunca, sino que siempre es susceptible de desarrollarse y diferenciarse indefinidamente; por lo que sería arbitrario, desde el punto de vista psicológico, dividir *a priori* el pensamiento matemático o lógico-matemático en dos campos, uno de los cuales debiese concebirse como prolongación del pensamiento «natural» (por ejemplo, ciertas formas de la «intuición») y el otro como si «avanzase en dirección contraria a la naturaleza humana» —según pensaba Pasch.

III. 1) La primera consecuencia de la perspectiva de los estadios y niveles jerárquicos es que la evolución del pensamiento no es lineal, y que la jerarquía de los niveles no es comparable a una simple estratigrafía por superposición. En efecto, si la formación de las conductas no obedeciese más que a una ley de sucesión acumulativa, tanto los niveles como los estadios no expresarían otra cosa que una división arbitraria efectuada a lo largo de un proceso continuo o puramente aditivo. Mas el hecho fundamental, por el contrario, es que las estructuras adquiridas en un escalón determinado no pasan sin más a los escalones siguientes, sino que han de experimentar una reconstrucción antes de que, así reconstruidas, puedan quedar integradas en las nuevas estructuras elaboradas en estos últimos. Acabamos de ver dos ejemplos de estas reconstrucciones, ya que el grupo de los desplazamientos adquirido en el

plano sensoriomotor se reconstruye entre los dos y los siete años en el de las operaciones concretas, y vuelve a hacerlo en el plano hipotético-deductivo (de doce a quince años), al tener que quedar integrado dentro de sistemas más complejos (sistemas dobles de referencia, etc.). De un modo general, entre el nacimiento y la adolescencia asistimos a tres grandes construcciones de estructuras: las primeras son sensorio-motrices (nivel I), y se reconstruyen a continuación para integrarse en otras mucho más amplias, las de las operaciones concretas (II), que, a su vez, se reconstruyen posteriormente para integrarse en las estructuras proposicionales, todavía más ricas y amplias (III).

Ahora bien, este avance no lineal, sino por reconstrucciones e integraciones sucesivas, importa mucho para nuestro propósito. Al comparar los pasos que da el pensamiento[9] en los procesos propios del axiomatista moderno (de Frege a Pasch e Hilbert, por ejemplo) con los que da el pensamiento «natural» —tomando como referencia, en cuanto a este último término, el pensamiento de un escolar normal de doce a quince años de nuestras sociedades (que es capaz de asimilar las partes sencillas de los Elementos de Euclides)—, podría uno inclinarse a atribuir al pensamiento del axiomatista una inversión completa de sentido con respecto al «ingenuo» pensar del escolar que comienza dificultosamente en los ejercicios hipotético-deductivos; pero si no solamente se comparan ese refinado pensamiento de nivel *N* y el pensamiento ingenuo de nivel III, sino también este último con las estructuras sensorio-motrices de nivel I, que constituyen el punto de partida, se plantean dos cuestiones que hemos de examinar más abajo: 1) ¿es verdaderamente mucho mayor la distancia entre *N* y III que entre III y I?, y 2) ¿es verdad que realmente no pueda compararse la innegable inversión de sentido que existe entre los niveles *N* y III (pues el proceso mental que encontramos en *N* es el de un análisis regresivo que trata de determinar las condiciones previas de la demostración, y el de III es el de demostraciones en cadena, de intención constructiva) con las inversiones de

[9] Hablamos deliberadamente de los pasos del pensamiento, oponiéndolos a las reglas del aparato formal.

sentido que se observan ya entre el nivel III (demostraciones constructivas) y el II (construcción de estructuras operatorias con ocasión de la manipulación de objetos), y, especialmente, con respecto al I (construcción de estructuras de acciones)?

Cuando se plantean de este modo las cuestiones, tal y como nos obliga el punto de vista genético, se entrevé súbitamente un parentesco mucho mayor que el que podría parecer inicialmente entre las formas más «naturales» del pensamiento y las que podrían creerse más «artificiales». Tal vez se responda que tampoco es ya «natural» el pensamiento de un escolar de doce a quince años, puesto que se ha nutrido de todo el auxilio que le han aportado el lenguaje, la familia y la escuela por mediación de la palabra y de una serie de obras escritas que se remontan incluso hasta Euclides (lo cual supone más de veinte siglos de cultura). A lo cual contestaremos, naturalmente, en primer término, que el lenguaje, la familia, la escuela, la cultura y el mismo Euclides son también «naturales», si bien puntualizando que pertenecen al orden de la sociogénesis tanto como al de la psicogénesis; luego contestaremos que el escolar no es un recipiente pasivo al que se rellene de alimentos culturales, sino que es absolutamente necesario que posea ciertas estructuras previas para poder asimilar tal cultura, estructuras de las que precisamente hablamos al mencionarlas con el nombre de nivel III (y cuya formación está acelerada y enriquecida por la cultura, pero no determinada por ella de pies a cabeza); y, finalmente, contestaremos, sobre todo, que cuando se plantean los problemas teniendo en cuenta juntamente la sociogénesis y la psicogénesis, son exactamente los mismos, en lo que se refiere a las distancias e inversiones de sentido, entre los niveles *N* y III que entre el III y el I.

Estas observaciones nos conducen, pues, al punto 2).

2) Desde el punto de vista genético, las construcciones mentales no quedan acabadas jamás, y el hecho de que permanezcan «abiertas» conduce a considerar toda construcción como capaz de prolongarse en construcciones ulteriores. Se suele pensar que, en el dominio lógico-matemático, las intervenciones de la intuición plantean cuestiones relativas al punto de vista del sujeto y, por lo tanto, a la psicología, mientras que las cons-

trucciones axiomáticas y formalizadas no plantearían problema alguno desde el citado punto de vista (estamos hablando de estas construcciones bajo el ángulo de los procesos de pensamiento que conlleven, no de su validez). Así, el gran Kronecker sostenía que los números «naturales» eran resultado de la creación divina, mientras que las demás variedades numéricas provendrían de la fabricación humana; cosa que era ya una manera de oponer lo «artificial» a lo «natural», y conviene acordarse de ello cuando el lógico moderno atribuye al pensar «natural» las diversas formas intuitivas del pensamiento y considera «artificial» el pensamiento orientado hacia la axiomática. Ahora bien, la historia ha llevado a suprimir toda oposición de naturaleza entre los números enteros positivos, negativos, racionales, irracionales y complejos, de tal suerte que habría que considerarlos a todos naturales o a todos artificiales; y como aquella distinción ha perdido toda significación, lo único que se puede decir es que todos ellos son, *simultáneamente*, objetos del pensamiento desde el punto de vista del sujeto y objetos de demostración válida desde el del lógico. Y de igual manera, cualquier formalización resulta ser, lo mismo que cualquier intuición, objeto de un pensar para el sujeto (de lo cual provienen los problemas genéticos planteados por el psicologismo) y de validación para el lógico (tanto en el sentido de negarse a ella, en cuanto a la intuición, como en el de su aceptación).

Desde el punto de vista genético, cualquier forma de pensamiento, por artificial que pueda parecer, constituye, pues, el producto de un desarrollo; y el hecho de que éste no afecte más que a una *élite* muy restringida de sujetos no contradice, en modo alguno, esta aserción: pues es evidente que cuanto más evolucionado sea el nivel del pensamiento, más capaz será éste de diferenciarse en formas especializadas. Incluso cuando la formalización no corresponda más que a una forma especializada de pensamiento, entre otras varias, el problema psicológico de comprender cómo esta forma particular haya podido constituirse y cuáles sean sus relaciones de hecho con el pensamiento común (siempre teniendo en cuenta que, de derecho, las construcciones de uno pueden ser válidas sin que lo sean las del otro) continúa siendo el mismo.

8 PROBLEMAS PSICOLOGICOS GENERALES DEL PENSAMIENTO LOGICO-MATEMATICO

A. EL PROBLEMA DE LAS ESTRUCTURAS

Una vez en posesión de las reglas metodológicas que limitan la competencia del análisis psicológico únicamente a las cuestiones de hechos, por oposición a las de validez o de fundamento, pero que respetan la autonomía de aquellas cuestiones, vamos a intentar la aplicación en el presente capítulo del método genético al estudio de algunos problemas psicológicos generales suscitados por el pensamiento matemático; entendiendo por problemas generales aquellos cuya existencia sea independiente de la formalización: son los de la naturaleza de las «estructuras» (en el sentido de Bourbaki), la evidencia y sus variaciones, las diversas formas de la intuición y, por fin, la invención frente al descubrimiento. Cada uno de estos problemas se descompone en dos géneros de cuestiones, unas relativas al desarrollo formador (desde el punto de vista de las acciones y las operaciones) y las otras, a la conciencia del sujeto; mas, como es natural, toda solución de conjunto ha de suponer la coordinación de las dos perspectivas.

Recordemos otra vez más que estos análisis se proponen una finalidad epistemológica, y no lógica; es decir, que en lo que respecta a todos y cada uno de los puntos enumerados, la intención no reside en poner en tela de juicio cuestiones de validez, sino en contribuir a la solución de estas otras dos: a) la de qué corresponde al sujeto o pertenece al objeto, y b) la de

la índole ontológica de este último. Por ejemplo, en lo que concierne a las «estructuras matrices» en el sentido bourbakista, la cuestión sobre la que la psicología puede aportar algo es la de determinar si tales estructuras corresponden a estructuras mentales generales de los mecanismos operatorios del sujeto o si no se deben más que a una elaboración técnica reciente. Pero si son «naturales», en el sentido de arraigadas más o menos profundamente en la actividad del sujeto, queda todavía la cuestión de esclarecer cómo se desarrollan genéticamente: ya sea en función de las condiciones internas de esta actividad (y decimos deliberadamente actividad, oponiéndola a toda «experiencia» introspectiva), ya de experiencias diversas (físicas, etcétera), del lenguaje, etc. Así pues, son los datos genéticos los que, una vez «coordinados» con los requisitos normativos del lógico y el matemático —véase el § 42 del capítulo 7, reglas c, e y f—, pueden servir para elucidar el problema de su índole ontológica (dominio *E* del § 42) y epistemológica (relaciones *SE*, *SF* y *FE*).

§ 44. **Las «estructuras matrices» de Bourbaki.**—Preparado por los descubrimientos de E. Galois acerca de la noción de grupo, por el célebre programa de Erlangen, de F. Klein, en cuanto a la geometría, y por gran número de otros trabajos, la tarea realizada por la escuela Bourbaki en orden a sacar a luz la «arquitectura de las matemáticas» ha consistido en presentar éstas de modo que reposen sobre un número no deductible *a priori* de estructuras fundamentales o «estructuras matrices», y que puedan estar engendradas por un doble movimiento de diferenciación interna de las estructuras y de combinaciones entre ellas, o entre ciertas subestructuras de una y ciertas otras de otra. Salta a la vista el interés de tal tentativa por lo que se refiere a los problemas psicológicos suscitados por la existencia de las matemáticas; cosa que sucede desde tres puntos de vista: 1) el de recurrir al concepto de «estructura», que plantea la cuestión de una posible comparación con las estructuras mentales; 2) el de la noción de una filiación matemática de las estructuras, que plantea la posibilidad de compararlas con las filiaciones genéticas, y 3) el del método empleado para descubrir las estructuras (antes de justificarlas axiomáticamente),

método cuyo análisis puede proporcionar algunas indicaciones, o, al menos, sugerencias, sobre su tipo de existencia, teniendo en cuenta las relaciones entre el sujeto y el objeto.

En un conocido artículo sobre «La arquitectura de las matemáticas» [1], N. Bourbaki expone el punto de vista de la escuela que se alberga tras este nombre acerca de lo que actualmente es la unidad de las matemáticas. Pese a la ilimitada diversidad de teorías de muy distinta apariencia, sería posible abstraer de la naturaleza de los elementos acerca de los cuales respectivamente traten, de tal suerte que se desprendan las relaciones estructurales aisladas, esto es, las relaciones comunes, con independencia de tales elementos; una vez enumeradas las condiciones de estas relaciones, constituirían los axiomas de la estructura considerada, por lo cual sentar la teoría axiomática de ésta consistirá en extraer todas las consecuencias lógicas de tales axiomas, proscribiendo toda otra hipótesis.

Así presentada, la teoría de las estructuras es un formalismo, pero no es tal cosa sino una vez que se hayan descubierto y caracterizado las estructuras principales; sólo que para descubrirlas y reducirlas al menor número posible no hay otro método que el de una especie de comparación inductiva y sistemática entre las teorías existentes, de forma que se desprendan sus semejanzas estructurales más generales. Bourbaki tiene asimismo mucho cuidado de puntualizar que el número de estructuras fundamentales actualmente conocidas no tiene nada de definitivo; dicho de otro modo, no hay deducción alguna *a priori* de las estructuras, y su detección corresponde mucho más a un análisis reflexivo y retroactivo que a una construcción directa. Allí mismo donde la construcción progresiva ha conducido a una compartimentación cada vez más numerosa (álgebra, análisis, teoría de números, geometría), el análisis comparativo que descubre las estructuras se remonta, por el contrario, hacia las bases comunes más generales; pero no hace tal cosa más que rompiendo la compartimentación y buscando los isomorfismos entre esta o aquella parte de un compartimento y tal o cual parte de algún otro.

---

1 En LE LIONNAIS, *Les grands courants de la pensée mathématique* (Cahiers du Sud, 1948), págs. 35-47 [vers. cast.: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires, Eudeba, 1948, págs. 36-49].

Semejante análisis regresivo ha sacado a luz —hasta ahora— tres estructuras fundamentales, que resultan ser irreductibles entre sí, y a las que se llama «estructuras matrices», ya que de ellas cabe derivar todas las demás actualmente conocidas; son las que siguen:

1) *Las estructuras algebraicas,* cuyo prototipo es el grupo, caracterizado ante todo por el hecho de que si están dados dos elementos x e y (en este orden) del sistema, queda determinado unívocamente un tercer elemento, z, en virtud de una operación, π, que los reúne: $x \pi y = z$. A lo cual se añaden la asociatividad, el elemento neutro, e, y la inversión, $x \pi^{-1} x = e$.

2) *Las estructuras de orden,* entre las cuales, como tipo importante, se destaca el reticulado o *lattice,* que se refiere a las relaciones $x R y$ (siendo x, como máximo, igual a y). Ahora no se supone que los dos elementos, x e y, determinen unívocamente un tercero, sino que se tienen: $x R x$; $x R y$ juntamente con $y R x$ entraña $x = y$, y además, $x R y$ e $y R z$ entrañan $x R z$; en cambio, no queda excluido de las estructuras de orden el caso en el que dos elementos, x e y, sean incomparables (por ejemplo, si R significa «está contenido en»).

3) *Las estructuras topológicas* se refieren a los conceptos de entorno, límite y continuidad.

Cabe, pues —por ahora—, derivar de estas tres estructuras matrices todas las demás, por diferenciación o por combinación. Aquélla consiste en limitar la generalidad de las estructuras matrices «enriqueciéndolas con axiomas adicionales, cada uno de los cuales aportará su cosecha de nuevas consecuencias» (pág. 43 [*vers. cast. cit.*, pág. 45]); y la combinación consiste en construir estructuras (a las que se puede denominar *múltiples*) por interferencia de dos estructuras matrices, si bien no yuxtapuestas, sino ajustadas orgánicamente mediante uno o varios axiomas que las enlacen: por ejemplo, el álgebra topológica y la topología algébrica.

Finalmente, se llega a las teorías particulares de la mate-

mática clásica especificando los elementos a que se hayan de referir las estructuras, ya sean diferenciadas o múltiples; pero entonces, aquéllas dejan de presentarse como autónomas, y adoptan la forma de encrucijadas en las que interfieren las estructuras. Son, pues, estas últimas las que, con su jerarquía, constituyen la arquitectura efectiva de las matemáticas.

Si bien cabe asimilar la teoría bourbakista de las estructuras a un formalismo, debido al constante empleo del método axiomático, las «formas» a que llega son comparables a algo así como estructuras vivas: «la unidad (que este método) confiere a la matemática no es la armadura de la lógica formal, unidad de un esqueleto sin vida: es la savia nutriz de un organismo en pleno desarrollo, el flexible y fecundo instrumento de investigación sobre el que, a partir de Gauss, han trabajado todos los grandes pensadores de las matemáticas, todos los que —por adoptar la fórmula de Lejeune Dirichlet— han tendido siempre a substituir el *cálculo* por las *ideas*» (pág. 47 [*vers. cit.*, pág. 49]). Nos parecía muy importante citar este pasaje, cuyas opiniones sobre la lógica no compartimos, porque da testimonio de la preocupación, que también es nuestra (y tan nítidamente visible en la célebre tesis de Lautmann, a pesar de su aparente platonismo), por asimilar las estructuras matemáticas a formas vivas o a reflejos de la organización viviente, en general.

§ 45. Las estructuras de clases y de relaciones en las acciones y las operaciones del sujeto. Formalización del «agrupamiento».—Tras haber caracterizado así las «estructuras matrices», el problema que se nos presenta consiste en averiguar si existe alguna relación entre ellas y las correspondientes a las acciones y operaciones del sujeto. Se trata, por tanto, de un problema genético central, y conviene, ante todo, fijar con exactitud los términos en que hayamos de plantearlo.

I. Adviértase, en primer lugar, que no se trata, en modo alguno, de preguntarse si tales estructuras matrices corresponden o no a algún concepto bien delimitado en la conciencia del sujeto. Cuando se dice que los números enteros y positivos son «naturales», se suele entender con ello que los comienzos

de su infinita serie corresponden a cierto conjunto de nociones corrientes que se expresan lingüísticamente mediante la numeración hablada o escrita: «uno», «dos», «tres», etc.; pero esta manera de ver las cosas es bastante superficial, ya que un niño puede saber contar hasta diez o hasta veinte sin estar en posesión de las operaciones sin las cuales no debería hablarse de número (por ejemplo, la correspondencia biunívoca entre dos colecciones de seis objetos de modo que se conserve la equivalencia aunque los objetos no se encuentren mirándose por parejas, término a término)[2]; luego si el único indicio de que se dispusiera acerca del carácter «natural» de los primeros enteros positivos fuese la presencia de la numeración hablada en el pensamiento consciente del sujeto, no cabría concluir gran cosa: por una parte, puesto que aquella numeración podría ser de índole social o lingüística y carecer de relación con la psicología del sujeto individual, y, por otra, porque el problema reside en llegar hasta las operaciones subyacentes a la toma de conciencia (por ejemplo, la mentada correspondencia biunívoca), sin contentarse con los datos verbales e introspectivos. De todos modos, cualesquiera que sean las reservas que se guarden, los primeros números enteros y positivos corresponden a unos conceptos perfectamente delimitados y distintos en el pensamiento consciente del sujeto, lo cual ha bastado a muchos autores para declararlos «naturales» —pero que, por nuestra parte, no bastará, por lo que hemos dicho.

Ahora bien, las estructuras matrices de Bourbaki no corresponden a nada semejante a ello en el pensar consciente del sujeto: nadie posee, antes de haberlo aprendido, «concepto» alguno de qué sean un grupo, un reticulado, una homeomorfía topológica, etc.; y en la mayoría de los medios culturales no se llega a conocer tales conceptos antes de entrar en la Universidad, o de pasar a los últimos cursos de la enseñanza secundaria. Así pues, no nos vamos a preguntar si tales estructuras son «naturales» en el plano del pensamiento reflejo, mirado desde el punto de vista del sujeto; lo cual simplifica enorme-

[2] Véase PIAGET y SZEMINSKA, *La genèse du nombre chez l'enfant* (Delachaux et Niestlé).

mente el problema, ya que así podemos descartar en gran medida el factor que más perturba cuando se trata de realizar un análisis genético: a saber, el de la transmisión verbal y educativa.

Lo que vamos a preguntarnos, en cambio, es si el sujeto manifiesta ciertas estructuras coordinadoras que presenten alguna semejanza con las estructuras algebraicas, de orden o topológicas, y ello en la coordinación espontánea de sus acciones, al manipular objetos, o en la coordinación espontánea de sus operaciones (en cuanto acciones interiorizadas). El método es, por tanto, mucho más directo que cualquier análisis del pensamiento consciente del sujeto. Mas, por otra parte, se advierte inmediatamente la dificultad principal que ofrece: es la de determinar en qué medida las «estructuras» que así se suponen estar en el mecanismo operativo (acciones y operaciones) y, en especial, operatorio de las actividades del sujeto, pertenecen realmente a éste o se introducen por el psicólogo mismo, esto es, por un sujeto número 2 que estudie al sujeto número 1 y le atribuya sus propias estructuras mentales. Este último problema afecta a la epistemología de la psicología, y no nos concierne aquí en cuanto tal; pero sí nos interesa en un sentido práctico, ya que es preciso que evitemos caer en el conocido círculo que P. Gréco ha formulado recientemente en los siguientes términos: «*Nil est in intellectu quod non prius fuerit in psychologo*» [3].

Con objeto de hacer visible cómo hemos de eludir semejante círculo, puntualicemos primeramente que cuando hicimos el intento de extraer los tipos principales de las estructuras operatorias mentales ignorábamos absolutamente todo acerca de las estructuras matrices de Bourbaki: en 1952 tuvo lugar en Melun, cerca de París, un pequeño coloquio sobre las «estructuras matemáticas y estructuras mentales», coloquio que se inició con dos charlas, una de J. Dieudonné, sobre las estructuras bourbakistas, y la siguiente, nuestra, sobre las estructuras

---

[3] [«No hay nada en el intelecto que no haya estado antes en el psicólogo»]. Por lo demás, podría asimismo responderse, con Leibniz, «nisi ipse intellectus» [«salvo el intelecto mismo»]; pero semejante respuesta perdería todo sentido genético.

mentales *; pues bien, sin conocer en aquel entonces la obra de Bourbaki, habíamos encontrado precisamente, simplemente tratando de clasificar las distintas estructuras operatorias observadas empíricamente en el desarrollo de la inteligencia del niño, tres tipos de estructuras irreductibles entre sí en su punto de origen, pero que se combinaban luego de diversas formas; y estas estructuras eran: aquellas cuya forma de reversibilidad es la inversión o anulación ($A — A = 0$), y que cabe describir por referencia a modelos algebraicos o de grupo; las que tienen una forma de reversibilidad que consiste en la reciprocidad, que han de describirse apoyándose en estructuras de orden, y las estructuras a base de lo continuo, en particular, las estructuras espaciales, que poseen el notable carácter de que sus formas elementales son de índole topológica antes de llegar a las construcciones métricas y proyectivas. Aquella convergencia entre las dos charlas iniciales, que eran enteramente independientes, sorprendió a los miembros del coloquio, empezando por los mismos autores (acerca de los cuales, si está permitido, podría decirse que el primero se distingue por su ignorancia voluntaria de la psicología, y el segundo, por su ignorancia involuntaria de las matemáticas...).

No deja de ser cierto, sin embargo, que siempre hemos intentado describir las estructuras observadas desde el punto de vista genético refiriéndonos a modelos tomados de la lógica simbólica elemental (y ésta será nuestra segunda observación en cuanto al círculo del psicólogo y del sujeto). Pero importa mucho puntualizar claramente (y subrayar con vigor) que no tratábamos de reducir el pensamiento natural a unos modelos formales, sino —cosa completamente distinta— de valernos del lenguaje más preciso posible para describir las estructuras naturales, esforzándonos, en cambio, por respetar las limitaciones propias de estas últimas y por llegar a las variedades más pobres y más elementales posibles de las estructuras de conjunto (sin preocuparnos por su falta de generalidad ni,

* El trabajo de J. Piaget se ha publicado, con el título de «Las estructuras matemáticas de la inteligencia y las estructuras operatorias», en la obra de PIAGET *et al.*, *L'enseignement des mathématiques* (Delachaux et Niestlé), vertida al castellano con el título de *La enseñanza de las matemáticas* (Madrid, Aguilar, 1963). (*N. del T.*)

sobre todo, de coherencia desde el punto de vista lógico). Por tanto, no es difícil en tales investigaciones disociar lo que corresponda al sujeto número 1 (o sea, al niño en su desarrollo) del lenguaje propio del sujeto número 2 (esto es, del psicólogo), dado que las estructuras descritas en las actividades del número 1 quedan caracterizadas por sus propias limitaciones.

II. Dicho esto, el primer punto en que hay que parar mientes (para poder comprender luego las analogías existentes entre los datos genéticos y las estructuras bourbakistas) es el de que en las actividades del sujeto existen estructuras en el doble sentido 1) de sistemas de conjunto que presentan leyes de composición propias al sistema como tal, y 2) de sistemas capaces de presentar las mismas formas con independencia de la variedad de contenidos.

1) El hecho de que haya sistemas que presenten leyes de composición propias del sistema como tal es una trivialidad en psicología; pero queda aún por determinar qué sistemas nos interesan ahora. La psicología de la forma (o *Gestaltpsychologie*) nos ha acostumbrado a reconocer el hecho de que las percepciones, los recuerdos, etc., no aparecen como compuestos aditivos a partir de elementos previos (sensaciones, etcétera) simplemente asociados entre sí, sino que siempre y por donde quiera se tiene desde el principio una totalidad: por ejemplo, una forma geométrica organizada inmediatamente y destacada sobre un fondo. Tal existencia de totalidades constituye, pues, un hecho general, pero es menester que distingamos de raíz —frente a la hipótesis «gestaltista» de una unidad de naturaleza de todas las estructuras mentales— dos clases de totalidades irreductibles una a otra y de las cuales sólo la segunda nos concierne aquí. Por una parte tenemos las estructuras que podemos continuar llamando «*Gestalten*», que se caracterizan por su composición no aditiva [4] y por su irreversibilidad (así, las ilusiones perceptivas constituyen transformaciones no compensadas), las cuales, por regla casi general,

[4] Por ejemplo: si prolongamos un segmento de recta, A, mediante otro, A', más corto que A, este último se sobreestima con respecto a A', y, por consiguiente, no es igual a A aislado. Tendremos, pues, que $A(A') > A$, en donde '$A(A')$' significa A comparado con A'.

se observan en el campo de las variedades figurativas del conocimiento (salvo en lo que respecta a las formas evolucionadas de la intuición geométrica cuando el aspecto figurativo se subordina al operativo). En cuanto a las variedades de conocimientos vinculadas a la acción o a las operaciones, conducen casi siempre a sistemas de conjunto caracterizados por las respectivas leyes de totalidad, pero tienden hacia formas de composición aditivas y reversibles.

Por ejemplo, a todos los niveles del desarrollo se encuentran conductas clasificatorias, bien en estado diferenciado, bien de modo tal que las clasificaciones sean inherentes a otras formas de acción: de suerte que el sujeto, o repartirá los objetos en colecciones distintas, o actuará sobre ellos de la forma que sea (cogerlos, mecerlos, etc.), pero de modo que tales acciones supongan también una clasificación (por ejemplo, entre los objetos que se puedan y los que no se puedan coger, etc.). Ahora bien, cualquiera que sea el nivel, es evidente que las unidades clasificatorias —evitemos decir desde un comienzo clases, ya que durante largo tiempo se trata de clases mal organizadas o «preclases»— no existen independientemente unas de otras, y que se cuenta ya con un sistema, cualquiera que sea su grado de imperfección o de elaboración. Así, ya al nivel sensorio-motor es posible apreciar la existencia de tales sistemas, por ejemplo, sin más que presentar un objeto nuevo a un nene de ocho a diez meses; éste agarrará el objeto, lo chupará, lo sacudirá (para ver si se produce un sonido), lo frotará contra el borde de la cuna, etc., como si para comprender su naturaleza el sujeto lo incorporase sucesivamente a las categorías o esquemas de acciones posibles; ahora bien, tales esquemas sostienen entre sí múltiples relaciones estructurales del tipo de las siguientes: todo lo que puede agarrarse puede verse, pero la recíproca no es cierta; todo lo que puede oírse puede mirarse, pero tampoco es cierta la recíproca; hay objetos que cabe agarrar y oír a la vez, otros que poseen la primera propiedad pero no la segunda, otras ésta sin aquélla y otros ninguna de las dos; dicho sucintamente, existe un esquematismo de la acción sensorio-motriz que conlleva cierta estructura clasificatoria, por elemental que sea. En niveles pos-

teriores se añaden a ella cierto número de clasificaciones diferenciadas, consistentes en repartir los objetos en colecciones en el espacio, con encajamientos sucesivos, intersecciones, etcétera; y cabe seguir los progresos de estas clasificaciones de tipo aditivo simple (reuniones y encajamientos) o multiplicativo (tablas de doble entrada, que obedezcan a la vez a dos criterios). Y también a todos los niveles estas clasificaciones presentarán leyes estructurales de conjunto, siendo posible comprobar que su organización tiende cada vez más a presentar dos caracteres generales, cierta aditividad ($A+A'=B$, etc.) y cierta reversibilidad ($B - A'=A$, etc.), que hacen a estos sistemas más móviles y, sobre todo, más inteligibles que simples «*Gestalten*».

Lo mismo podría decirse de los sistemas de relaciones. Pues a partir del nivel sensorio-motor el niño es capaz de apilar formando una torre una serie de fichas, *A, B, C*, ..., de tamaño decreciente ($A>B>C$ ...), cosa que constituye un modelo de seriación dentro de las acciones prácticas (sin representación); luego, estos esquemas se reelaboran en el plano de la representación concreta: ya a los cinco años el 50 por 100 de los sujetos, antes de actuar, son capaces de dibujar la forma que tendrá la escalera resultante cuando se les pide que coloquen una serie de regletas por orden de tamaño creciente. Tras de lo cual vienen las seriaciones operatorias de que hablaremos en el apartado 2) y en el § 46 [5].

Las correspondencias biunívocas, etc., dan lugar asimismo muy precozmente a estructuraciones, ya sea bajo la forma de correspondencias cualificadas (por ejemplo, que *A* corresponda a *A'*, *B* a *B'*, *C* a *C'*, etc., porque cada una de tales parejas se caracterice por una cualidad común, o bien que $A<B<C$ ... corresponda a $A'<B'<C'$ ...), ya bajo la de correspondencias «cualesquiera» (en las que a una unidad corresponderá otra con independencia de en qué consistan).

2) Ahora bien, estos sistemas no solamente presentan leyes de totalidad en cuanto sistemas (primera condición para la existencia de estructuras), sino también (segunda condición) otras

---

[5] INHELDER y PIAGET, *La genèse des structures logiques élémentaires. Clasifications et sériations* (Delachaux et Niestlé, 1959).

que son independientes de la naturaleza de los objetos a que se apliquen las mencionadas condiciones de sistema o de estructura. Conviene, pues, precisar ahora en qué consisten las leyes de tales estructuras operatorias.

Recordemos ante todo, sin embargo, que, como nuestro objetivo es exclusivamente genético, para caracterizar estas estructuras mentales operatorias no hemos intentado construir los modelos más generales posible de estructuras, sino, por el contrario, detectar las estructuras reales más elementales: lo cual significa, pues, las más limitadas en sus modos de composición y más particulares, por estar vinculadas a su funcionamiento natural. En la medida en que, pese a todo, estas estructuras presenten cierto grado, por restringido que sea, de generalidad, ello no sucederá en virtud de una búsqueda de generalidad que procediese del observador, sino debido al hecho objetivo de que las estructuras elementales cuya construcción se completa o llega a quedar en equilibrio en los sujetos de un nivel determinado (alrededor de los siete a ocho años) son relativamente generales a ese nivel determinado.

La observación y la experiencia nos han enseñado, en efecto, que si se denominan «operaciones» las acciones interiorizadas, reversibles (en el sentido de que sea posible efectuarlas en ambos sentidos) y coordinadas en estructuras de conjunto, y si llamamos «concretas» a las operaciones que intervengan en la manipulación de objetos pero que no se refieran únicamente a proposiciones o enunciados verbales —pues llamamos «hipotético-deductivas» a las operaciones que se refieran a éstos con independencia de toda manipulación—, todas las estructuras del nivel de las operaciones concretas se reducen a un solo modelo, al que podemos designar con el nombre de «agrupamiento».

El «agrupamiento» es un sistema carente de generalidad desde el punto de vista lógico, debido a sus múltiples limitaciones. El interés que presenta es, por tanto, esencialmente psicológico, y se debe (desde este punto de vista) a su carácter elemental, así como a sus mismas limitaciones; mas como parece constituir, psicológicamente, el punto de partida de las demás estructuras o —puntualizando algo más— la forma co-

mún de las diversas estructuras iniciales, puede ser conveniente formalizarlo, con objeto de dar precisión a su estudio. Eso es lo que ha hecho nuestro colaborador, el lógico J. B. Grize, de la forma que sigue [6].

III. Sea el sistema (M, →, +, —), siendo M un conjunto no vacío, → una relación y + y — dos operaciones binarias. Designemos con X, Y y Z unas variables que tomen valores en M, y estatuyamos las dos definiciones [7]

(D_1) $X \longleftrightarrow Y = \text{df. } X \to Y \wedge Y \to X$

(D_2) $X \to_1 Y = \text{df. } X \to Y \wedge \sim (X \longleftrightarrow Y) \wedge$
$(Z)\ (X \to Z \wedge Z \to Y \,.\supset.\, X \longleftrightarrow Z \vee Y \longleftrightarrow Z).$

Por consiguiente, la relación → puede leerse «está contenido en», y, en la medida en que ←→ indique equivalencia, es una relación de orden parcial. La relación $\to_1$ puede leerse «está contenido inmediatamente en».

El sistema (M, →, +, —) constituirá un agrupamiento en caso de que se satisfagan las siguientes condiciones:

(Refl) $X \to X$

(Trans) $X \to Y \wedge Y \to Z\ .\,)\,.\ X \to Z.$

(G_0) si $Y \in M$ ⊣ $X \to Y$ ⌙ (a) $X \in M$.
si $X \in M$ ⊣ $X \to_1 Y$ ⌙ (b) $Y—X \in M$,
(c) $X+(Y—X) \in M$.

Se observa que G_0b) y c) sirven para limitar las composiciones posibles.

(G_1) $X+(Y+Z) \longleftrightarrow (X+Y)+Z$

(G_2) $X+Y \longleftrightarrow Y+X$

(G_3) $X \to Y \,.\supset.\, X+Z \to Y+Z$

(G_4) $X \to Y\ .\equiv.\ X+Y \longleftrightarrow Y$

6 Véase J. B. GRIZE, «Du groupement au nombre, essai de formalisation», en *Études d'Épistémologie génétique*, vol. XI, en especial las páginas 72-81.

7 Valiéndonos de los signos lógicos siguientes: — (negación), ⊂ (implicación [material]), ≡ (equivalencia), ∧ (conyunción), ∨ (adyunción), ( ) (cuantificador universal), (E) (cuantificador existencial) y ∈ (pertenencia).

Así, pues, G_4 constituye un principio de reabsorción, del cual es un caso particular el de tautificación.

(G_5) $Y \rightarrow X + Z . \supset . Y — X \rightarrow Z$.

G_5 permite considerar la operación — como inversa de la +, pese a la tautificación y sin introducir clases negativas.

(G_6) $Y \rightarrow X + (Y — X)$.

G_6 vale para limitar la asociatividad del sistema sin debilitarlo demasiado.

(G_7) $X \rightarrow_1 Y . \supset . X \rightarrow Y — (Y — X)$.

G_7 permite limitar la diferencia a los elementos «contiguos» (composición progresiva).

(G_8) Existe un $O \in M$ tal que $O \rightarrow X$.

Habiéndolo definido de este modo, ningún agrupamiento es reductible a un grupo; lo cual se debe, al menos, a dos razones. La primera es que, en un grupo, dos elementos cualesquiera del sistema, x e y, engendran, merced a su composición, x Op y (siendo Op la operación directa o la inversa del grupo), un tercer elemento del sistema, z, sin pasar por los elementos intermedios entre x e y; cosa que sucede con movilidad completa. Por el contrario, en un agrupamiento tal que $A + A' = B$, $B + B' = C$, etc., las composiciones no se pueden hacer más que en forma contigua, y, por consiguiente, progresivamente (por ejemplo, $A + C' = D — B' — A'$); luego la movilidad del sistema queda restringida en forma correspondiente. En segundo lugar, los grupos son asociativos, mientras que la asociatividad del agrupamiento está limitada a las composiciones entre términos distintos, de modo que $(A + A) — A$ no es idéntico a $A + (A — A)$.

Por otra parte, ningún agrupamiento es reductible a un reticulado entero, dado que, en los agrupamientos aditivos, si bien las cotas superiores son distintas, las inferiores son todas nulas. En cambio, la estructura del agrupamiento contiene a la de los semi-reticulados.

Estas limitaciones son muy significativas desde el punto de vista psicológico; en efecto, las composiciones que se realizan exclusivamente paso a paso revelan un comienzo de poder deductivo, pero todavía no liberado de las manipulaciones concretas y que de este modo no procede más que por encajamientos contiguos, sin llegar a ninguna combinatoria. Por el contrario, las operaciones hipotético-deductivas del nivel siguiente (a partir de los once a doce años, con un rellano de equilibrio hacia los catorce a quince años) presentan un carácter fundamental nuevo, el de involucrar una combinatoria; lo cual constituye el índice distintivo de los comienzos de una estructura de operaciones proposicionales, ya que las dieciséis operaciones binarias de la lógica de proposiciones bivalente se construyen por combinación a partir de cuatro asociaciones básicas ($p . q \vee p . \bar{q} \vee \bar{p} . q \vee \bar{p} . \bar{q}$) que, en sí mismas no constituyen más que un «agrupamiento» elemental de naturaleza simplemente multiplicativa.

IV. Así pues, si llamamos «agrupamientos elementales» a los que no involucren aún combinatoria alguna (y que, por tanto, no dispongan de todas las operaciones posibles en un álgebra de Boole), tenemos que comprobar que, con todo, su estructura presenta, ya al nivel de las operaciones concretas, cierto grado de generalidad. En efecto, encontramos tal estructura en ocho sistemas distintos, todos representados en grados diversos de acabamiento, en el comportamiento de los niños de siete a ocho hasta los once a doce años, sistemas que se diferencian entre sí según se trate de clases o de relaciones, de composiciones aditivas o multiplicativas y de correspondencias simétricas (o biunívocas) o asimétricas (o counívocas):

		Clases	Relaciones
Aditivos	asimétricos.	I	V
	simétricos.	II	VI
Multiplicativos	counívocos.	III	VII
	biunívocos.	IV	VIII

Vamos a caracterizar brevemente los agrupamientos en cuestión[8]. El I es el de los encajamientos simples (por ejemplo: «truchas» incluido en «peces», incluido en «animales», incluido en «seres vivos»); el II corresponde a las «vicarías» (ejemplo: «los suizos más todos los extranjeros con respecto a Suiza=los holandeses más todos los extranjeros con respecto a Holanda»); el III es el de las tablas de dos o *n* entradas (por ejemplo, los objetos clasificados simultáneamente en redondos o cuadrados y en rojos o blancos), y el IV, el de las clasificaciones que correspondan a árboles genealógicos (una de las dimensiones será la constituida por el antepasado, sus hijos, sus nietos, etc., y la otra, la de los hermanos, primos hermanos, etc.). El agrupamiento de las seriaciones (encadenamiento de relaciones asimétricas transitivas) es el V, y el VI, el de las composiciones entre relaciones simétricas (transitivas y aliotransitivas); el agrupamiento VII es el de las multiplicaciones entre dos seriaciones que se refieran, bien a la misma relación (correspondencia serial entre dos filas distintas de objetos ordenados de acuerdo con una y la misma seriación, por ejemplo, unas figuritas humanas cada vez mayores en correspondencia con bastoncitos cada vez mayores), bien a dos relaciones distintas (por ejemplo, objetos ordenados de acuerdo con su peso y su volumen simultáneamente); en cuanto al VIII, finalmente, corresponde a las relaciones genealógicas que habían aparecido ya en IV traducidas en clasificación de términos.

Observemos, para acabar esta exposición previa de datos, que si bien el sistema de los números naturales —que se adquiere, aunque de manera sólo aproximada, a lo largo de este mismo período de operaciones concretas— parece hallarse sumamente alejado de la estructura elemental de agrupamiento que acabamos de ver, es posible mostrar, por el contrario: 1) que, genéticamente, la construcción de los números naturales se efectúa por «síntesis» progresiva de los agrupamientos I y V; 2) que, axiomáticamente, si se formaliza el concepto de agrupamiento tal y como lo ha hecho J. B. Grize, o sea, hacien-

[8] Pueden verse mayores detalles en nuestro *Traité de Logique* (Colin, 1949).

do corresponder a sus limitaciones naturales ciertos postulados limitadores que restrinjan el juego de las composiciones posibles, cabe asignar un estatuto coherente a dicha «síntesis» de los agrupamientos I y V reuniendo sus operaciones, lo cual conduce *ipso facto* a levantar las limitaciones de composición y permite deducir los cinco axiomas de Peano, comprendido el de recurrencia. Volveremos sobre estos extremos en el capítulo 10.

§ 46. Las dos formas de reversibilidad (inversión y reciprocidad) y su combinación final en un grupo de cuatro transformaciones.—Una vez expuestos estos datos, volvamos a nuestro problema y preguntémonos si existe alguna relación entre las estructuras naturales elementales que acabamos de describir esquemáticamente y las tres estructuras matrices de Bourbaki. Pero hasta el momento no hemos descrito más que los caracteres más generales de las estructuras elementales de «agrupamiento», lo cual equivale, simplemente, a indicar bajo qué formas limitativas comunes se nos aparecen las primeras estructuras de operaciones: nos falta aún clasificarlas desde el punto de vista de los caracteres más importantes que habrán de desempeñar un papel en la construcción de las estructuras ulteriores a medida que se vayan eliminando las limitaciones en cuestión. Ahora bien, desde este punto de vista (el de las estructuras ulteriores), los agrupamientos elementales se reparten en dos dicotomías, según usen una u otra de las dos formas posibles de reversibilidad (la inversión o la reciprocidad) y según procedan por composición de totalidades de «tipos» crecientes, a partir de elementos discretos, o por descomposición de «tipos» decrecientes, a partir de totalidades continuas: la primera dicotomía lleva a distinguir las estructuras respectivamente comparables a las algebraicas y a las de orden, en tanto que la segunda equivale a la distinción entre las estructuras que podrían llamarse topológicas y las que no recurren a lo continuo, que pueden retrotraerse a las dos primeras.

I. Vamos a llamar *inversión* a la forma de reversibilidad que hace corresponder a la operación T una operación inversa, T^{-1}, que compuesta con la anterior baste para anularla;

se trata de la forma de reversibilidad propia a los agrupamientos aditivos de clases, pues $+A - A = 0$: esto es, si a una clase, X, el sujeto empieza por añadir la clase A y después la separa, ello equivale a no añadir ni retirar nada. Con lo cual viene a decirse que en el caso de la reversibilidad por inversión la composición de las operaciones directas y de las inversas correspondientes conduce al elemento neutro (o idéntico general) del sistema, o sea, a la clase nula o vacía cuando se trate de los agrupamientos aditivos de clases $(+A - A = 0)$.

En cuanto a la reversibilidad por *reciprocidad*, es la propia de los sistemas aditivos de relaciones. Vamos a describirla desde el punto de vista del sujeto, sin preocuparnos por sus usos lógicos, ya que se sigue tratando de estructuras «naturales»; y luego indagaremos cuáles son sus analogías con las estructuras bourbakistas. Vamos a distinguir, además, la reciprocidad de las relaciones mismas de la correspondiente a las operaciones que las afecten.

En lo que se refiere a las relaciones mismas, hemos de decir primeramente, de modo general, que consiste, ya en permutar los términos de una relación, $A < B$, ya en invertir ésta (pasar de $<$ a $>$), ya en ambas cosas; de ahí que se tengan tres formas de reciprocidad:

$$\begin{aligned} R \quad & (A < B) = B < A \\ R' \quad & (A < B) = A > B \\ R'' \quad & (A < B) = B > A \end{aligned}$$

Por consiguiente, se cumplen $R = R'$ y $R'' = RR' = R'R$.

Hablamos de la suma de relaciones en el caso de concatenación, y de multiplicación en aquél en que se tengan a la vez dos relaciones distintas, como «más pequeño $\times$ más pesado», etcétera. Si ahora se compone aditivamente la relación $(A < B)$ con sus R, R' y R'', se obtienen:

(1) $(A < B) + (B < A) \equiv (A = B)$

(2) $(A < B) + (A > B) \equiv (A = B)$ ídem

(3) $(A < B) + (B > A) \equiv (A < B)$

En ninguno de los tres casos, pues, hay anulación, sino que el producto es o una equivalencia o la relación de partida, inalterada.

Si queremos averiguar ahora en qué consiste la reversibilidad propia de un agrupamiento aditivo de relaciones asimétricas transitivas (seriación), empezaremos por designar las relaciones $A<B$, $A<C$, $A<D$, etc., mediante *a, b, c,* y las relaciones $B<C$, $C<D$, $D<E$, etc., por *a', b', c',* etc. El agrupamiento permite, entonces, no sólo contemplar las relaciones $<$ o $>$ en cuanto tales, sino también sus valores teniendo en cuenta la magnitud de las diferencias (en lo que se refiere a las relaciones *a, b, c,* etc.).

(4) $a<b<c$, etc.; pero $a \gtreqqless a' \gtreqqless b'$, etc.

Así pues, en cuanto a *a, b, c,* etc., se llega a lo que Suppes llama una escala «hiperordinal»; si bien la estructura no alcanza tal nivel en lo que concierne a las relaciones *a', b', c',* etc.

Vamos a designar la relación conversa, *R''*, mediante el signo — (o sea, escribiremos *—a, —b, —c,* etc., en el sentido de $B>A$, $C>A$, etc.), por referencia a la operación psicológica que equivale a leer la serie en sentido inverso. En primer lugar nos encontraremos con las composiciones directas,

(5) $(A<B) + (B<C) = (A<C)$; etc.; o sea, $a+a'=b$, etc.

Si, como convención de lectura, se conviene en considerar como resultado de la composición la relación que enlace el primer término de la primera relación componente con el segundo término de la segunda relación, las inversas serán las siguientes:

(6) $(A < C) + (C > B) = (A < B)$, o sea, $b—a' = a$
$(A < D) + (D > C) = (A < C)$, o sea, $c \cap b' = b$
etc. etc.

De donde

(7) $(A < B) + (B > A) = (A = A)$, o sea, $a—a = 0$
$(B < C) + (C > B) = (B = B)$, o sea, $a'—a' = 0$
etc. etc.

Pero, incluso así presentada, la reversibilidad propia de semejante sistema no se reduce a una anulación análoga a que aquélla a que conduce la inversión; pues la relación que designamos con 0 no es la supresión de una relación, sino la de una diferencia, lo cual lleva a una relación de equivalencia ($A=A$).

Por consiguiente, es claro que desde el punto de vista de las «naturales» estructuras que son los agrupamientos hay dos formas irreductibles de reversibilidad, una que actúa en los agrupamientos aditivos de clases, y la otra, en la cadenas de relaciones.

En lo que se refiere a los agrupamientos multiplicativos, la operación inversa parece, a primera vista, ser de la misma índole para los agrupamientos de clases y los de relaciones; pues si llamamos multiplicación a la operación consistente en clasificar los objetos de acuerdo con dos o más principios clasificatorios *a la vez*, la operación inversa consistirá en partir del producto y hacer «abstracción» de una o varias de tales clasificaciones o sistemas de relaciones. Estas operaciones, por tanto, cuando se las aplique a dos elementos, A y B, conducirán a lo siguiente:

$$A \times B = AB \text{ y } AB : B = A, \text{ o sea, } A(a_1)B \times R(a_2)B = A(a_1\ a_2)B$$
$$\text{y } A(a_1\ a_2)B : a_2 = A(a_1)B,$$

lo cual significa, en el caso de las inversas: «haciendo abstracción de la clase B, los AB son A», y «haciendo abstracción de la relación a_2, la relación $a_1\,a_2$ se reduce a a_1».

Por tanto, así considerada, la abstracción (:) no parece ser, hablando propiamente, ni una inversión (dado que no retira miembros de clase alguna, sino que, simplemente, cesa de reunirlos bajo la clase de que hace abstracción), ni una reciprocidad (puesto que no invierte ninguna relación, limitándose a hacer abstracción de ella). Pero si se compone una multiplicación de clases con su inversa se obtiene la clase Z, que es la más general del sistema:

$$(\times A) \,.\, (:A) = Z, \text{ ya que } A = AZ.$$

Por ejemplo, si recorto de entre los seres vivos, *Z*, una especie determinada, *A*, y hago luego abstracción de esta clase, sus miembros (sin especificar más) no son ya sino unos *Z*. Por el contrario, al hacer abstracción de una relación asimétrica entre dos términos me limito a considerarlos como términos de una relación no especificada:

A(a)B : (a)=A(x)B, siendo (x)=una relación no especificada.

Así pues, en el caso de las clases suprimo una clase, y en el de las relaciones lo que elimino es la especificación de una de ellas, pero conservando en ambos casos los elementos que estuvieran enlazados por tales clase o relación; mas no por ello deja de suceder que cuando se trata de clases la composición lleva al elemento, a una absorción en el elemento más general del sistema (como sucedería con la absorción $A+Z=Z$), mientras que en el caso de las relaciones la composición no es, en definitiva, sino un hacer abstracción.

II. Por consiguiente, tanto desde el punto de vista aditivo como del multiplicativo (si bien en éste menos claramente), existe una diferencia de naturaleza entre las estructuras de clases y las de relaciones, cuando se limita uno a considerarlas en la ingenua forma que revisten en los comportamientos del sujeto: por ejemplo, en las clasificaciones y las seriaciones (esto es, en los comportamientos más elementales, cuyos comienzos se observan con anterioridad al lenguaje). Sin que decidamos aún, por el momento, hasta qué punto corresponderá esta dualidad de las estructuras iniciales a la de las estructuras matrices que Bourbaki llama algebraicas y de orden, percatémonos de tres hechos importantes en el desarrollo psicológico de aquellas dos estructuras de partida:

1) Mientras se trate de manipular objetos en función de sus propiedades cualitativas, o proposiciones consideradas desde el punto de vista de su contenido cualitativo (sin operaciones interproposicionales), las dos estructuras que nos ocupan, cuyas formas de reversibilidad son la inversión (clases) y la reciprocidad (relaciones), se mantienen separadas hasta llegar

a un nivel tardío (de doce a quince años), en el que aparecen las operaciones hipotético-deductivas. Así sucede que, en el nivel de las operaciones concretas, el niño no posee estructuras que involucren simultáneamente inversiones y reciprocidades, sino que en cada caso aplica, o bien una estructura, o la otra (o las dos yuxtapuestas, pero sin composiciones que permitan pasar de una a otra).

2) Cuando, por el contrario, se hace abstracción de las cualidades, como ocurre al comenzarse las enumeraciones (en las que se considera a cada elemento como una unidad, independientemente de sus propiedades cualitativas), se observa una primera forma de enlace entre las estructuras de clases y las de relaciones: hemos de ver, en efecto (capítulo 11, § 56) que, psicológicamente, la construcción de los primeros números naturales proviene de una «síntesis» en un solo sistema de una sucesión de encajamientos de clases y de una seriación (agrupamientos I y V).

3) Al nivel en el que se constituyen las operaciones hipotético-deductivas (aquél en que se sabe razonar sobre una proposición considerada como hipótesis, independientemente de la verdad de su contenido), asistimos a la construcción de una nueva estructura, resultante de una forma de enlazar las estructuras con inversión a las que poseen reciprocidad. Pero ahora no vamos a hablar de «síntesis», como hacíamos acerca de la formación de los números, sino de «combinación», en el sentido de que la nueva estructura llevará consigo, por una parte, unas transformaciones, N, dotadas de inversión y, por otra, unas transformaciones, R, dotadas de reciprocidad; y unas y otras se mantendrán distintas, pero susceptibles de componerse entre sí, contrariamente a lo que sucedía al nivel 1).

Para describir esta nueva estructura vamos a emplear la notación usual de la lógica de proposiciones bivalente por simples motivos de comodidad, pero insistiendo sobre el hecho de que ello no implica, en absoluto, ni que el sujeto se dé a sí mismo reglas equivalentes a los axiomas del lógico, ni que el empleo natural de las operaciones que vamos a escribir $(p \supset q)$, $(p \vee q)$, etc., esté de acuerdo con el de éste. Hemos

comprobado[9], simplemente, que al nivel hipotético-deductivo el preadolescente o el adolescente no se limitan ya a razonar a partir de encajamientos simples o de seriaciones, etc. (y, por tanto, de los ocho agrupamientos mencionados al final del § 45), sino de acuerdo con las diversas posibilidades que ofrece la combinatoria, o sea, de acuerdo con dieciséis posibilidades cuando se tienen cuatro asociaciones básicas (AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ y $\bar{A}\bar{B}$). Estas dieciséis posibilidades corresponden, pues, a las dieciséis operaciones binarias que cabe efectuar con dos proposiciones, p y q, y sus negaciones; y por ello nos valdremos, para designarlas, del simbolismo proposicional corriente, en lugar de construir un simbolismo particular con vistas a tales combinaciones proposicionales «naturales»; pero, repitámoslo, sin hacer ninguna hipótesis acerca de la correspondencia entre la estructura formal y la natural, salvo la de que ambas involucran la misma combinatoria elemental. Igualmente podríamos escribir tales combinaciones a base de clases, también en el marco de un álgebra de Boole (frente a lo que sucede con las limitadas estructuras de los «agrupamientos elementales»); pero como para el sujeto no se trata ya de combinar objetos (según ocurría al nivel «concreto»), sino hipótesis expresadas verbalmente, es más cómodo simbolizarlas como proposiciones.

Dicho esto, y ateniéndonos, pues, al aspecto algebraico de la estructura, pero sin referirnos a axiomática alguna, comprobamos que el sujeto se comporta como si se pudiera hacer corresponder, a una cualquiera de tales operaciones proposicionales, una operación *inversa*, así como, por otra parte, una operación *recíproca* (en el caso en que sean distintas una de otra). Por ejemplo, a $p \supset q$ corresponden una inversa, $p \cdot \bar{q}$, y una recíproca, $q \supset p$, las cuales responden a los mismos criterios que antes; es decir, que la operación $p \supset q$ compuesta con su inversa se anula, $(p \supset q) \cdot (p \cdot \bar{q}) = 0$, y compuesta con su recíproca da lugar a una equivalencia, $(p \supset q) \cdot (q \supset p) = (p \cdot q) \mathrel{\substack{\subset \\ \supset}} (p \cdot q)$.

Tiene que quedar bien claro que el sujeto no reflexiona sobre las operaciones que emplea, y que no sería capaz de

9 Véase Inhelder y Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, París (P. U. F.).

formularlas: como hemos dicho insistentemente en el apartado I del § 45, las estructuras de que aquí hablamos no existen como «conceptos» definidos y distintos en la conciencia del sujeto, sino que únicamente constituyen los instrumentos de su comportamiento; así pues, es el observador, y no el sujeto, el que las advierte y las formula por referencia a un modelo. En el caso particular de $p \supset q$, $p \cdot \bar{q}$, $q \supset p$ y $p \cdot q$, el observador comprobará, por ejemplo, que el sujeto, cuando se encuentre ante una situación causal compleja, planteará dos tipos de preguntas: a) si el hecho x entraña el hecho y (cosa que frecuentemente traducirá él mismo valiéndose de dos proposiciones, las que designamos con p y q, enlazadas por las palabras «si (p), se tendrá (q)»), y para averiguarlo indagará en este caso si aparece o no un contraejemplo, x y no-y, o sea $p \cdot \bar{q}$; b) también se preguntará si es x el que entraña y o, al revés, es y el que entraña x (cosa que en nuestra notación será «¿$p \supset q$ o $q \supset p$?»), e igualmente tratará de someter a examen la hipótesis «si q, p» viendo si no existe ningún contraejemplo, y y no-x (luego $\bar{p} \cdot q$), pero comprendiendo que la combinación $\bar{p} \cdot \bot$ excluye a $q \supset p$ y es compatible con $p \supset q$, de la misma forma que $p \cdot \bar{q}$ excluye a $p \supset q$, pero se compadece con $q \supset p$. En una palabra, los pasos mismos que dará en su indagación (acompañados de razonamientos verbales) traslucirán que utiliza dos procesos reversibles combinados entre sí: la inversión (o negación) y la reciprocidad.

Ahora bien, este nuevo hecho es fundamental. Pues hasta llegar a este nivel del desarrollo no era posible detectar en el comportamiento del sujeto más que estructuras limitadas a la reversibilidad, ya fuese de la inversión (agrupamiento de clases), ya de la reciprocidad (agrupamientos de relaciones); pero con la aparición de la combinatoria proporcional vemos, en cambio, que se elabora una estructura compleja[10], que reúne en un solo sistema los dos tipos de composición, hasta entonces separados. ¿En qué consisten, entonces, las leyes de este sistema?

---

[10] Y genéticamente derivada de las anteriores, ya que la combinatoria no es más que una generalización de la vicaría, generalización cuyos progresos pueden seguirse a la vez en varios campos independientes (clasificación, combinaciones de objetos, de hipótesis, etc.).

Vamos a describirlas primeramente (para que se nos entienda bien) en el lenguaje de las funciones proposicionales; y más tarde trataremos de encontrar a qué corresponderá la estructura descrita así, en términos abstractos, dentro del campo de la conducta del sujeto.

Sea un funtor cualquiera: por ejemplo, $p \supset q$, cuya forma normal adyuntiva es $p \,.\, q \vee \bar{p} \,.\, q \vee \bar{p} \,.\, \bar{q}$. Llamaremos inversión, *N*, a la transformación que lleve a su negación, $N(p \supset q) = p \,.\, \bar{q}$; la reciprocidad será la transformación, *R*, que consista en negar las proposiciones elementales que intervengan en su forma normal, pero conservando sin alteración los funtores (.) y (V), de suerte que se tendrá $R(p \supset q) = \bar{p} \,.\, \bar{q} \vee p \,.\, \bar{q} \vee p \,.\, q = q \supset p$; llamaremos correlatividad, *C*, a la transformación consistente en permutar los (.) y (V) de la forma normal, dejando intactas sus proposiciones elementales, con lo cual tendremos que $C(p \supset q) = (p \vee q) \,.\, (\bar{p} \vee q) \,.\, (\bar{p} \vee \bar{q}) = \bar{p} \,.\, q$; y, por fin, llamaremos identidad, *I*, a la transformación que no altere la expresión que consideremos: $I(p \supset q) = p \supset q$. En este caso obtendremos:

$$NR=C; \quad NC=R; \quad CR=N, \text{ y } NRC=I,$$

lo cual constituye un grupo conmutativo de cuatro transformaciones (el «*Vierergruppe*» [«grupo cuadrático»] de Klein)[11].

La existencia de semejante sistema se señala en el comportamiento del sujeto no solamente en los procesos de indagación de que acabamos de hablar (¿es cierto que *x* entraña *y*?, etcétera), sino, además, en la estructuración de un conjunto de situaciones hasta el momento incomprensibles para el niño, ya que involucran la coordinación de dos reversibilidades, que es preciso al mismo tiempo distinguir y componer entre sí. Por ejemplo, en el equilibrio entre un peso y la resistencia de un líquido, no basta que el sujeto comprenda que cabe aumentar o disminuir el peso y la resistencia, sino que tiene que comprender, además, que existe una relación compensadora distinta de la inversión, por más que se componga con ella

---

[11] Acerca de este grupo, *INRC*, que gobierna las operaciones proposicionales, véanse J. PIAGET, *Traité de Logique* (Colin, 1949), págs. 271-86, y *Esai sur les transformations des opérations logiques* (P. U. F., 1952), capítulo 2.

(por ejemplo, que una disminución de la resistencia del líquido lleva al mismo resultado que un aumento del peso, sin ser idéntica a él, etc.); y análogamente, en un sistema de movimientos relativos (un móvil que se desplace sobre una tablilla que a su vez se mueva sincrónicamente, en el mismo sentido o en el otro), es también menester que se compongan inversiones y compensaciones. En resumen, a partir de los once a doce años se observa cómo se constituye cierto número de esquemas operatorios nuevos, cuya característica común es la de coordinar las inversiones y las reciprocidades —que se presentan, estas últimas, como compensaciones, simetrías, etc.— de forma tal que se llega a combinaciones, y ya no únicamente a «agrupamientos» que avancen paso a paso; y si se intenta ahora extraer las transformaciones correspondientes a estos nuevos sistemas de la misma forma que cabe formular los caracteres generales de las clasificaciones, seriaciones o correspondencias anteriores a este nivel, se llega siempre de nuevo a la misma estructura de grupo hallada, o sea, la del grupo *INRC*.

§ 47. El primado de la topología en la geometría del niño. Todavía nos queda hablar de una tercera estructura elemental, tan primitiva como la de clases y la de relaciones, y muy anterior a las estructuras compuestas de que acabamos de ocuparnos (en el punto 3) del apartado II). Si se quiere hacer un inventario de las operaciones lógico-matemáticas de los sujetos al nivel de las operaciones concretas, y reconstituir su formación desde los comienzos de la representación, se comprueba, en efecto, que, además de las acciones y operaciones referentes a objetos discretos consistentes en reunirlos, ordenarlos, etc., existen otras relativas a la descomposición y recomposición de los objetos mismos, en cuanto totalidades en bloque: son las operaciones relativas al espacio y el tiempo. Y se plantea la cuestión de saber si son las mismas operaciones anteriores, aunque, simplemente, aplicadas a lo continuo, o si conllevan caracteres irreductibles; dicho de otro modo, si el espacio y lo continuo no constituyen sino un contenido nuevo al que se apliquen las mismas operaciones, o si se trata

de operaciones propiamente constituyentes del espacio (de modo que éste no se reducirá a las meras percepciones), que, por consiguiente, engloben lo continuo en su propia forma, y no simplemente como materia.

Si inicialmente no atendemos más que a la enseñanza escolar de la geometría, podremos pensar que, una vez en posesión de cierta lógica y cierta aritmética, el niño las aplicará sin más a las figuras perceptivas; y de esta suerte la geometría no constituiría más que una matemática aplicada, en el sentido en que se la ha concebido durante largo tiempo en el campo mismo de la ciencia. Pero el niño posee o elabora una geometría con sus acciones, mucho antes de someterse a enseñanza alguna; y la primera cuestión que hay que examinar es la de saber si esta construcción espontánea ofrece un orden más cercano al orden de la adquisición histórica (geometría euclídea para comenzar, luego proyectiva y, finalmente, topológica), o al de la construcción teorética (primeramente la topología, luego paso a la métrica euclídea a través de la métrica general, o bien paso a las transformaciones proyectivas, luego a las afines y después a las semejanzas y a los desplazamientos con conservación de las distancias). Naturalmente, no cabe comparar directamente las tan generales estructuras empleadas por la geometría con las tan elementales (y, por consiguiente, enormemente limitadas) del niño; mas parece legítimo comparar, sin embargo, ciertos elementos comunes; que son, por una parte, los invariantes de los «grupos fundamentales» del geómetra (homeomorfías para las transformaciones topológicas; conservación de las rectas, pero no de las paralelas, de los ángulos ni de las distancias, para las transformaciones proyectivas; conservación de las paralelas, pero no de los ángulos ni de las distancias en el caso de las transformaciones afines; conservación de los ángulos, pero no de las distancias, con las semejanzas, y conservación de las distancias para los desplazamientos), y, por otra, las nociones de conservación que el niño adquiere progresivamente a lo largo de la coordinación de tales acciones u operaciones especiales, y que constituyen invariantes —si bien no de ningún «grupo» fundamental de índole sumamente general, sino de unos «agrupamientos» par-

ticulares (en un sentido análogo al del descrito en el § 45, III)) y, por ello, de alcance muy limitado.

Ahora bien, la observación y la experiencia muestran lo que sigue:

1) Mucho antes de constituirse los invariantes relativos a los desplazamientos (longitudes desplazadas o distancias recorridas, que no se conservan, ni unas ni otras, en ciertas situaciones, hasta los siete a ocho años) y los relativos a las transformaciones proyectivas (recta proyectiva o puntual), se observan ciertos invariantes cualitativos referentes a los entornos, a las aperturas y cierres, a los cubrimientos (interioridad, exterioridad y frontera), a lo continuo y lo discontinuo, al orden concebido como composición de entornos y de separaciones (con la relación «entre»), etc.; en resumen, un conjunto de homeomorfías topológicas elementales. Por ejemplo, hay un nivel del dibujo dentro del cual el cuadrado, el triángulo, etcétera, se representan como simples curvas cerradas (hablamos de representación, esto es, del dibujo, del concepto, etc., y no de percepción, que plantea otros problemas), y en el que las cruces, etc., se representan mediante intersecciones de rectas: a este nivel, el niño sabrá perfectamente dibujar un pequeño círculo dentro de otro grande o fuera de él, o incluso sobre su frontera, mientras que no tendrá en cuenta los ángulos, etc.

2) Los invariantes de la métrica euclídea se construyen en el mismo nivel (hacia los siete a ocho años) que los invariantes proyectivos y que las afinidades —conservación de las paralelas en las transformaciones afines del rombo— y semejanzas.

3) La construcción de los sistemas naturales de coordenadas (con un eje horizontal y otro vertical), que señala el momento en que se terminan las operaciones concretas espaciales (hacia los nueve a diez años, no antes) se sincroniza con la coordinación de las perspectivas o de los puntos de vista (con relación a dos o tres objetos, y no ya a uno sólo).

En resumen, la construcción espontánea del espacio representativo del niño —no el perceptivo— parece encontrarse más

cercana a los pasos propios de su construcción teorética que al orden histórico de los descubrimientos geométricos [12].

Así, pues, no es exagerado suponer que, junto a las estructuras cuya reversibilidad pertenece a los tipos de la inversión o la reciprocidad (y de las cuales queremos saber si prefiguran, respectivamente, las estructuras algebraicas y las de orden), es preciso distinguir a todos los niveles elementales un tercer tipo de estructuras, cuyas características iniciales son esencialmente topológicas y cuyas combinaciones con aquellas otras dan origen a estructuras espaciales más complejas (la medida, etc.).

§ 48. Las relaciones entre las tres estructuras elementales y las estructuras matrices de Bourbaki.—Una vez que hemos admitido la existencia en el niño de tres géneros de estructuras elementales [13], correspondientes a las operaciones con clases —luego con números, etc.— y con relaciones, y a las transformaciones continuas, conviene indagar ahora hasta qué punto y en qué sentido podríamos tener derecho a hacerles corresponder las tres estructuras matrices de Bourbaki (las algebraicas, las de orden y las topológicas) y a considerar éstas como de origen «natural».

La hipótesis que presentamos consiste, ante todo, en hacer que a las primeras de tales estructuras elementales les correspondan las estructuras «algebraicas», dado que la forma de reversibilidad de aquéllas es la inversión (de modo que la operación inversa, al componerse con la directa, lleva al elemento neutro del sistema), lo mismo que sucede con las estructuras de grupo; después, que a las segundas correspondan las estructuras de orden, dado que la reversibilidad de aquéllas estriba en la reciprocidad, como sucede también con la ley de dualidad de los reticulados [14]; y, por fin, en encontrar en las estructuras

[12] PIAGET e INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, así como (con SZEMINSKA), *La géometrie spontanée chez l'enfant* (París, P. U. F.).

[13] Y que no hay más que tres, ya que todas las estructuras particulares observadas hasta ahora se reducen a estas tres.

[14] «$A . B$ precede a $A+B$» se transforma en «$A+B$ sucede a $A . B$» per permutación de '.' y '+', así como de las relaciones «precede a» y «sucede a».

topológicas elementales lo correspondiente a las generales. Pero ¿qué significan estas correspondencias?

En el sentido bourbakiano de la palabra, «el rasgo común» de todas estas estructuras es «que se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza *no se especifica:* para definir la estructura se parte de una o varias relaciones en las que intervengan tales elementos»... (o relaciones entre *partes* de dicho conjunto); «luego postulamos que la relación, o las relaciones dadas, satisfacen ciertas condiciones (que se enumeran), las cuales constituyen los *axiomas* de la estructura considerada; y sentar la teoría axiomática de la estructura así dada es deducir las consecuencias lógicas de sus axiomas *prescindiendo de cualquier otra hipótesis* sobre los elementos considerados (en particular, de toda hipótesis sobre su «naturaleza» propia)[15].

Es claro que la «estructura» así definida no es idéntica a lo que desde el punto de vista genético llamamos nosotros «estructura»; sin embargo, al lado de las diferencias no dejan de existir ciertos caracteres comunes. Vamos a insistir primeramente sobre las diferencias, llamando «estructuras *M*» a las de los matemáticos, y «estructuras *G*» a las del sujeto estudiado genéticamente.

a) Las estructuras *M* son objeto de reflexión por parte del matemático, y éste elabora su teoría; mientras que las *G* no son objeto ni de teoría ni de reflexión por parte del sujeto, el cual ni siquiera adquiere conciencia de ellas en cuanto nociones determinadas y distintas, y no manifiesta su existencia sino en el desarrollo de su conducta y de sus razonamientos, según los llega a analizar el observador.

b) Las condiciones que cumplen las relaciones propias de las estructuras *M* son los axiomas de éstas, en tanto que en toda estructura *G* las condiciones se mantienen inmanentes a su funcionamiento, y el sujeto no extrae de ellas axiomática alguna.

c) En las estructuras *M,* las condiciones dichas constituyen el punto de partida de una deducción formal, o sea, sin hipó-

---

15 N. BOURBAKI, «L'architecture des mathématiques» (*loc. cit.*), páginas 40-1 [vers. cit., págs. 41-2].

tesis acerca de la naturaleza de los elementos que entren en juego; mientras que en toda estructura *G*, constituyen las reglas a las que obedecen las deducciones del sujeto (reglas que él es incapaz de formular —véase *b*)— y de las cuales —véase *a*)— ni siquiera tiene necesariamente conciencia), deducciones que no son formales, ya que durante todo el período de las operaciones llamadas «concretas» la forma es indisociable de su contenido.

Sin embargo, pese a todas estas diferencias, las estructuras *M* y las *G* se parecen en lo que sigue:

1) Por más que sean bastante menos generales que las *M* (e incluso mucho menos, en virtud de las diferencias *a*) y *c*)), las estructuras *G* se refieren, con todo, a elementos de índole muy diversa.

2) Lo que los Bourbaki llaman «relaciones» constitutivas de las estructuras *M* corresponde a lo que nosotros llamamos «operaciones» de las *G;* por ejemplo, la ley de composición de un «grupo», $z = x \pi y$.

3) Las «condiciones» de estas relaciones en las estructuras *M* son lo que nosotros llamamos «leyes de composición», que caracterizan la estructura *G* como sistema de conjunto; ejemplos: la reversibilidad por inversión ($+A - A = 0$) de las estructuras de clase, y por reciprocidad de las de relación.

Partiendo de esto, cabe representarse la correspondencia entre las tres estructuras matrices bourbakistas, *M,* y las tres estructuras elementales, *G,* no bajo el aspecto de un isomorfismo formal (que sería insostenible desde el punto de vista de la generalidad y de la validez), sino bajo el de una filiación genética, que se presentaría, entonces, del siguiente modo:

α) En la hipótesis de que basten las tres estructuras elementales *G* para abarcar el conjunto de todas las estructuras naturales, y de que el matemático, independientemente de la formalización, que siempre interviene *a posteriori,* no construya los seres matemáticos más que utilizando el pensamiento

«natural», el cual, simplemente, estará afinado por una serie ininterrumpida de abstracciones progresivas —las cuales no procederán de objetos empíricos (de la percepción, etc.), sino de las acciones y operaciones que ejerza sobre tales objetos (véase, acerca de esta fundamental distinción, el capítulo 10, § 52, apartado II)—, es necesario admitir que esta construcción de los seres matemáticos estará condicionada por los caracteres de las tres estructuras elementales, *G*.

β) Al proceder luego por vía regresiva, y efectuar, de este modo, una comparación «casi inductiva»[16] destinada a sacar a luz las estructuras comunes a las distintas teorías matemáticas ya elaboradas, el matemático bourbakista encontrará cierto número de «relaciones» generales y determinará sus «condiciones» (véanse las semejanzas 2) y 3) que acabamos de señalar).

γ) Mas al efectuar semejante análisis reflexivo con vistas a una teoría específica de las estructuras, y proponerse como meta explícita la de construir una axiomatización de aquellas estructuras, ha de tender desde el primer momento al *máximo* de generalidad. Por otra parte, como no solamente dispondrá de algunas estructuras particulares, harto pobres, elaboradas por el pensamiento natural no matemático, sino del conjunto de las construcciones matemáticas, en las que tales estructuras se hallan indefinidamente diferenciadas, alcanzará de un salto un grado superior de abstracción a partir de las acciones y operaciones que entren en juego en tales construcciones.

δ) Es necesario, en consecuencia, suponer que la abstracción a partir de las acciones y operaciones —a la que llamaremos «abstracción reflectora»— es distinta de la «abstracción a partir de los objetos percibidos —a la que llamaremos abstracción empírica» (en la hipótesis de que los objetos no perceptibles sean producto de ciertas operaciones)—, en el sentido de que la primera tiene forzosamente que ser constructiva. En efecto: frente a lo que sucede con la empírica, que consiste

---

16 De acuerdo con los términos empleados por J. Dieudonné en el simposio de Melun sobre las estructuras matemáticas y las estructuras mentales (el mencionado en el § 45).

simplemente en extraer los caracteres comunes de una clase de objetos (combinando la abstracción con la mera generalización), la abstracción reflectora consiste en extraer de un sistema de acciones o de operaciones de nivel inferior ciertos caracteres, cuya reflexión —en el sentido casi físico del término— sobre acciones u operaciones de nivel superior está garantizada por ella misma; pues no es posible percatarse de los procesos de una construcción anterior más que reconstruyéndola sobre un nuevo plano. Este hecho no es peculiar del pensamiento científico, sino que caracteriza todo el desarrollo de la inteligencia en cada paso de un escalón jerárquico al siguiente (sobre lo cual volveremos en el capítulo 10, §§ 52-53, para explicar la génesis psicológica de las matemáticas «puras»). En una palabra: la abstracción reflectora avanza por medio de reconstrucciones que exceden, integrándolas, las construcciones anteriores.

ε) Por tanto, la construcción de los entes matemáticos constituye una ampliación de los elementos del pensamiento natural, y la construcción de las estructuras *M*, una ampliación de unos entes matemáticos particulares. Y el hecho de que las *M* sean mucho más generales que las *G* no excluye, pues, una filiación genética de aquéllas a partir de éstas.

En conclusión: este examen de las relaciones existentes entre las estructuras matrices en sentido bourbakista, *M*, y las *G* nos permite eliminar de una sola vez dos malentendidos bastante generalizados que pesan sobre la interpretación de las matemáticas a partir de las actividades del sujeto. En primer lugar, suele imaginarse que, si es que los entes lógicomatemáticos dependen de las actividades del sujeto, bastará una introspección suficientemente a fondo para encontrarlos enteros y verdaderos en el seno del pensamiento natural. Pero, en realidad, lo que sucede es otra cosa:

1) El orden de la reflexión invierte el de la construcción. «πρῶτον μὲν ἐν τῇ γενέσει, ἔσχατον δὲ ἐν τῇ ἀναλύσει»*, decía ya Aristóteles; y la «ley de la toma de conciencia», de Claparède, puntualiza que se cae en la cuenta de una relación tanto más tar-

---

* «Lo primero en cuanto a la génesis, pero lo último en cuanto al análisis.» (*N. del T.*)

díamente cuanto más primitivo y automático sea su uso en la acción —en el sentido de que no encuentre obstáculos, mientras que se adquiere conciencia de las cosas con ocasión de las desadaptaciones—. Por ejemplo, la correspondencia biunívoca, tan elemental en la acción, no ha entrado en la esfera de la matemática como concepto objeto de «reflexión» y operatorio más que con G. Cantor; la estructura de grupo, que entra en juego ya en el nivel sensorio-motor, no salió a la luz sino con E. Galois, etc.

2) La toma de conciencia de algo no consiste en proyectar una luz interior que se limitase a iluminar una construcción terminada, sino que, como hemos visto, supone que se produzca una reconstrucción, que excederá, integrándola, la estructura de la construcción anterior, objeto así de «reflexión». Queda, pues, eliminada la posibilidad de que el paso de una estructura natural a unos entes matemáticos se reduzca a una simple introspección; y el inventor de tales entes puede perfectamente ignorar que los saca del pensamiento natural, ya que se contenta con construirlos utilizando ciertas estructuras, hasta aquel momento inconscientes, de su propio pensamiento (pero sin plantear la teoría de semejante utilización).

En segundo lugar, la explicación de las creaciones matemáticas a partir de las actividades del sujeto se interpreta, por lo general, demasiado rápidamente en un sentido idealista, como si el sujeto fuese separable de los objetos a que se refiera su actuación, por más que únicamente constituya uno de los polos de un sistema de interacciones, en cuyo interior sujeto y objeto son interdependientes. No es éste el momento de estudiar tal problema, sobre el que hemos de volver (en el capítulo 12), pero conviene señalar desde ahora que si bien la explicación genética no conduce necesariamente al empirismo, tampoco lleva forzosamente a un apriorismo idealista.

9 PROBLEMAS PSICOLOGICOS GENERALES DEL PENSAMIENTO LOGICO-MATEMATICO

(Continuación.)

B. EVIDENCIA, INTUICION E INVENCION

Si realmente existen las estructuras naturales *G*, y si constituyen el punto de partida de las «estructuras» *M* en el sentido bourbakista, se sigue cierto número de consecuencias en lo que respecta a los problemas de la evidencia, a las múltiples formas de intuición e, incluso, a las cuestiones relativas a la invención y el descubrimiento.

§ 49. La evidencia, sus variaciones y la necesidad lógica.— Al final del capítulo 6, Beth hace dos clases de observaciones que podemos tomar como punto de partida. La primera se refiere a la multiplicidad de las formas de la experiencia: junto a la experiencia empírica, que no interviene en la matemática pura, existen otras específicamente matemáticas, que quedan integradas en los recursos intelectuales del investigador «de la misma forma y con iguales títulos que las experiencias que tenga en otros dominios»; por ejemplo, el inventor que es acostumbrado a tratar ciertas clases de problemas de acuerdo con un método determinado atacará una cuestión nueva en función del hábito así adquirido. Desde nuestra perspectiva, tales experiencias forman parte de la «experiencia lógico-matemática», que conviene oponer a la «experiencia física», dado que la abstracción que les es propia revierte sobre las acciones mis-

mas del sujeto, y no sobre objetos exteriores (volveremos sobre este punto en el § 52).

Por otra parte, al admitir, con Bernays, la posibilidad de que se produzcan variaciones en la evidencia y al tratar, sin embargo, de eludir el relativismo escéptico que podría uno inclinarse a deducir de ella, propone Beth que distingamos entre dos clases de integraciones: una, «inductiva» o lenta, y la otra, «noética» o por comprensión repentina. Este último concepto, cuya importancia para la epistemología genética subraya Beth, corresponde, en efecto, a un amplio grupo de datos que nos gustaría examinar de nuevo desde el punto de vista de la psicología de la evidencia.

Es fácil comprobar, por ejemplo, que el niño que se encuentra al nivel de las representaciones preoperatorias no cree en la transitividad de las relaciones: advierte que la varilla *A* es más pequeña que la *B*, y que ésta es más pequeña que la *C*, pero cuando se le pregunta cuál es la relación entre la *A* y la *C* sin dejarle que las vea una al lado de la otra, el sujeto no se atreve a decidir sobre la cuestión, o se limita a adivinar, sin dar muestras de reconocer la necesidad allí inherente. Análogamente, J. Smedslund, estudiando en nuestro Centro de epistemología genética el aprendizaje de las operaciones referentes al peso, ha conseguido sin dificultad provocar el aprendizaje de la conservación del peso cuando se hace cambiar de forma una bolita de arcilla, valiéndose de una serie de comprobaciones repetidas del peso en una balanza; pero, aun con todas esas comprobaciones, no ha logrado obtener un aprendizaje inmediato de la transitividad[1]. En cambio, hacia los siete años en lo que se refiere a las longitudes (y, por lo general, un poco más tarde en cuanto a los pesos), la transitividad se impone como algo necesario; y sucede en ocasiones que durante los interrogatorios mismos se asiste a la aparición de esta evidencia, gracias a esa especie de comprensión brusca a la que frecuentemente se llama *insight* y que Beth denomina integración noética.

---

[1] J. SMEDSLUND, «Apprentissage des notions de la conservation et de la transitivité du poids», en *Études d'Épistémoliogie génétique*, tomo IX estudio III.

Ahora bien, en el caso particular de la transitividad de las desigualdades ordenadas es fácil explicar semejante integración noética valiéndose de la compleción (o, si se prefiere, el cierre) de la estructura a que se refiere la transitividad en cuestión, que es la seriación (o concatenación de relaciones asimétricas, conexas y transitivas); pues ya hemos visto (en el capítulo 8, § 45) que la seriación constituye uno de los agrupamientos sistemáticos a los que el niño llega por sí mismo. Así, cuando se le da una decena de reglillas (de 10 a 16,5 cm) para que las ordene, comienza —estadio I— por agruparlas por parejas (una pequeña y una grande) o por ternas, pero sin coordinación alguna entre sí; y tampoco es capaz de dibujar de antemano la serie o «escalera» que se proponga construir (que, por lo demás, tampoco consigue efectuar con sus acciones); es claro, pues, que a este nivel no se puede hablar de transitividad. Al llegar a otro estadio, el II, logra construir la serie, pero a través de diversas tentativas empíricas; y si bien desde los cinco años puede dibujar de antemano (en el 50 por 100 de los casos) la serie que quiera conseguir, no deja, por ello, de proceder por medio de ensayos y errores (el dibujo es una acción de sentido único, mientras que la construcción efectiva supone una coordinación de las relaciones «<» y «>»); a este nivel tampoco existe transitividad si no es en cuanto previsión plausible o probable, pero sin que haya necesidad. Por fin, en el estadio III (hacia los seis y medio a siete y medio años), el niño encuentra un método sistemático: coloca primero el menor de todos los elementos, *A* (tras haber efectuado las necesarias comparaciones dos a dos), luego el menor de los restantes, *B* (después de nuevas comparaciones dos a dos), a continuación el más pequeño de los que queden, *C*, etc.; así pues, el sujeto comprende previamente que un elemento cualquiera, *E*, será al mismo tiempo mayor que los ya colocados (*A*, *B*, *C* y *D*) y menor que los restantes (*F*, *G*, etc.): a este nivel, la comprensión de la transitividad es inmediata y se impone su evidencia, pero, como hemos visto, ello sucede en función de la compleción de la estructura de conjunto (de la cual es una propiedad entre otras).

Cabe incluso citar, como ejemplo de evidencias que no se

reconocen más que a cierto nivel, y que luego se imponen como algo necesario, todas las que se refieren a las nociones de conservación: de un conjunto de elementos con independencia de su disposición espacial (juntos o separados, etc.), de la longitud de una varilla a lo largo de sus desplazamientos, del número cardinal de una colección independiente de su reparto en subcolecciones, de la distancia entre dos puntos de referencia ya se encuentre más o menos ocupado el espacio intermedio, etc. Sería fácil mostrar aquí una vez más que la constitución de la evidencia está vinculada a estructuras totales, y, en especial, a su reversibilidad: en tanto que la estructura se construye progresivamente, su compleción o cierre, en cambio, queda marcado por una aceleración momentánea de tal construcción (siguiendo una especie de discontinuidad relativa), y las nuevas evidencias aparecen en función de este equilibramiento final.

Ahora bien, si se observa la existencia de tales relaciones entre las evidencias que se adquieren (o que se pierden) y la constitución de las estructuras, y ello desde los niveles de formación de las operaciones lógico-matemáticas en el niño, cabe suponer que lo mismo ocurre, *a fortiori*, en la historia de las ideas. Sin que sea menester recurrir a las estructuras bourbakianas, es indudable que toda evidencia es solidaria de un sistema, o de ciertos invariantes comunes a varios sistemas, y es inútil continuar el análisis en esta dirección.

El problema epistemológico central, a cuya solución pueden cooperar en parte la psicología y la sociología del pensamiento, es, por el contrario, el de la significación de las variaciones de la evidencia desde los puntos de vista de la universalidad de los hechos normativos, de un relativismo total o, por fin, de una posición intermedia que permite eludir el escepticismo sin volver al dogmatismo.

Conviene distinguir cuidadosamente, por lo pronto, entre los problemas que plantea la evidencia de índole física y los que se refieren a la evidencia lógico-matemática, ya que no puede aplicarse, sin más, la solución de unos a los otros. Como la verdad física se caracteriza por la adecuación o la inadecuación de unos cuadros matemáticos —en sí mismos cohe-

rentes— con la experiencia, es obvio que puede bastar, en ocasiones, una experiencia decisiva para contradecir una aserción hasta el momento evidente: por ejemplo, el experimento de Michelson y Morley ha destruido la evidencia del tiempo absoluto y universal, etc.; pero incluso en el plano físico, en el que la sucesión de experiencias capaces de modificar las evidencias lleva consigo gran parte de contingencia, las evidencias no se suceden al azar: la nueva evidencia es tanto más satisfactoria cuanto mejor logre integrar en sí un aspecto de la precedente, por ejemplo, a título de primera aproximación, o de verdad relativa a cierta escala de observación. No obstante lo cual, apenas podemos retener nada de ciertas evidencias físicas antiguas, como las vinculadas a la física de Aristóteles (el geocentrismo, el lugar propio, etc.).

En el campo lógico-matemático es preciso reconocer igualmente la existencia de ciertas variaciones de la evidencia, y Beth, siguiendo a Bernays, habla al respecto de *evidencias adquiridas:* por ejemplo, las constituidas bajo la influencia de la geometría euclídea (de las cuales ha habido algunas que han tenido que retocarse a partir del siglo XIX). Mas, a nuestro juicio, la interpretación de las evidencias adquiridas, que deberían substituir a la evidencia absoluta y universal del dogmatismo, no es capaz de escapar al relativismo integral más que puntualizando el mecanismo de su adquisición: si se compara ésta al aprendizaje de la marcha por el niño o al vuelo por el pájaro, se hace una referencia tranquilizadora, ya que se trata de adquisiciones inscritas en el marco del comportamiento hereditario y de la estructura orgánica de las especies; pero en lo que se refiere a las estructuras lógico-matemáticas, lo innato se reduce a bien poca cosa, y, en particular, hemos de ver (en el § 51) que no hay ninguna variedad de la «intuición» de la que podamos decir que escape a las leyes del desarrollo; si, por el contrario, se compara la adquisición de las evidencias a la de unos hábitos individuales o unas creencias colectivas cualesquiera, sabemos perfectamente a qué movilismo integral quedamos así expuestos. Ahora bien, sin que podamos esperar que los métodos genéticos y los histórico-críticos nos proporcionen consejos acerca de la elección de las evidencias verda-

deras y la exclusión de las falsas (Beth insiste sobre este punto al final del § 27), cabe esperar de ellos, sin embargo, un análisis *a posteriori* que nos haga ver que la adquisición y la sucesión de las evidencias no se efectúa al acaso de unos tropiezos con hechos de experiencia imprevisibles (cosa que justificaría el movilismo), sino que obedece a leyes de dirección o vecciones que cabe reconstituir retroactivamente. En una palabra, al lado de los estados permanentes y de las sucesiones fortuitas es preciso distinguir las «evoluciones dirigidas» (compárense las ortogénesis de la biología); y, aun en caso de que no existiera más que un ejemplo de ellas en los dominios psicogenético y sociogenético, sería el de las evidencias racionales: pues es difícil admitir que la razón misma evolucione sin razón alguna, y que la razón de la evolución de la razón pueda ser otra cosa que racional.

Bajo la aparente petición de principio que reviste el enunciado de esta hipótesis se encuentra un hecho que, hasta ahora, parece ser general, y que compete, pues, a la historia y la psicogénesis, y no a la demostración lógica: el de que un nuevo campo de evidencia no llega a abolir completamente el anterior, sino que lo integra en sí como subcampo; así, las intuiciones no euclídeas no han abolido las euclídeas, sino que lo único que han hecho es limitar su generalidad, y la crisis de evidencia que Brouwer ha suscitado con respecto al principio del tercio excluso y a los razonamientos por reducción al absurdo no ha quebrantado la confianza que se tenía en ciertas inferencias anteriores fundadas sobre tales principios, pero referentes a lo finito, etc. En resumen: la sucesión de las evidencias del plano lógico-matemático no se presenta como una simple substitución (cosa que, en ciertos casos, es posible en el plano físico), sino como una integración, acompañada de ampliación y de acomodaciones imprevisibles del marco general, así como de conservación de los marcos anteriores como casos particulares. Aquí se impone, pues, la distinción que hacía A. Lalande entre la «razón constituida», formada por evidencias adquiridas, y la «razón constituyente», que preside su formación; si bien a condición de no encerrar esta razón constituyente misma en un marco *a priori*, sino, por el contrario, de

no concebirla más que como la capacidad de integración de que acabamos de hablar, sin precisar de antemano la forma que ha de adoptar la integración (frente a la identificación de Lalande y de E. Meyerson).

La cuestión que nos ocupa confluye así con el problema general de la adquisición misma de las evidencias; y tal es el terreno en el que cabe esperar que el método genético nos proporcione alguna ayuda. Ahora bien, desde este punto de vista no se conocen más que cuatro mecanismos posibles de adquisición (sobre los cuales volveremos, por lo demás, en el capítulo 12, § 68):

1) Una regulación progresiva debida a la maduración interna del sistema nervioso: por ejemplo, la coordinación de la vista con la prehensión, la adquisición de la marcha, etc. (todo ejemplo concreto conlleva, por otra parte, una intervención parcial del factor 2), en cuanto que el papel del ejercicio se añade al de la maduración).

2) Un aprendizaje en función de la experiencia, o del ejercicio, con dos variedades:

 2 a) en función de la experiencia física, abstrayendo a partir de los objetos: por ejemplo, la adquisición de la noción de peso; y

 2 b) en función de la experiencia lógico-matemática, abstrayendo a partir de las acciones: por ejemplo, el descubrimiento de que la suma es independiente del orden (conmutatividad de la adición).

 Es frecuente que la variedad 2 b) se prolongue en 4).

3) Una adquisición en función del lenguaje y de las transmisiones educativas o sociales: por ejemplo, la adquisición de la numeración hablada.

4) Una adquisición por equilibramiento progresivo: por ejemplo, el descubrimiento de la conservación de la materia de una bolita de pasta cuya forma cambie, conservación anterior a la del peso y el volumen y, por ello,

incomprobable por la experiencia. Esta adquisición, pues, se debe al hecho de que el sujeto, en lugar de limitarse a emitir juicios únicamente sobre las configuraciones, se pone a razonar sobre las transformaciones, y lo hace de modo cada vez más reversible (en el sentido de que intervengan transformaciones inversas); ahora bien, el razonamiento referente a las transformaciones es resultado, a su vez, de una compensación de las perturbaciones exteriores mediante reacciones del sujeto (por ejemplo, por medio de unas transformaciones que se imagine en sentido inverso).

Este equilibramiento, que se puede interpretar mediante un juego de probabilidades secuenciales (pues las reacciones de cada estadio se harán más probables una vez constituidas las del estadio precedente), constituye a menudo una prolongación de una adquisición de tipo 2 b).

Siendo así las cosas, es fácil mostrar que, si bien la mayoría de las evidencias lógico-matemáticas se consolidan socialmente (cf. el modo 3) de adquisición), su génesis se remonta más allá de la vida social, y supone una experiencia en la que se abstraiga a partir de la acción (cf. el modo 2 b) de adquisición) o un equilibramiento (4). No cabe duda, por ejemplo, de que la conservación de las magnitudes (longitud o superficie) en los desplazamientos —noción empleada, pero no explicitada por Euclides— no puede tener un origen puramente social (en el sentido, por ejemplo, en que lo tiene una regla gramatical), por más que se consolide merced a transmisiones educativas; ni tampoco cabe que se constituya por vía puramente empírica (en el sentido de 2 a)), ya que no hay medida que nos pueda garantizar la invariancia de los instrumentos de medida mismos, y que si, con C. E. Guillaume y su «invar», se han llegado a idear sistemas de compensación que garanticen la invariancia relativa del metro patrón de la Oficina Internacional de Sèvres, ello se ha hecho respondiendo a ciertas necesidades surgidas de un marco teorético previo. Cuando se sigue la constitución progresiva de esta conservación en el niño, que inicialmente no cree en la conservación de las longitudes en caso de desplazamiento, se da uno cuenta de que, aun cuando, indudablemen-

te, la favorece cualquier contexto de experiencias del tipo 2 b) (consistente, por ejemplo, en la combinación de desplazamientos directos con inversos), la conservación no se adquiere más que por un juego progresivo de equilibramientos: de hecho, no se convierte en evidente más que en la medida en que la estructura del grupo de los desplazamientos impone, en cuanto que es la condición más sencilla, la de hacer que las longitudes no varíen. Por ejemplo, cuando se desplazan una con respecto a otra dos varillas, *A* y *B*, cuya igualdad se haya comprobado previamente, el niño empieza por no estar seguro de que lo que sobresalga *A* por uno de los extremos con respecto a *B* habrá de ser igual a lo que, recíprocamente, sobresalga *B* por el otro extremo con respecto a *A;* pero luego, bruscamente, acepta la igualdad y la conservación de las longitudes como la «estrategia» más sencilla posible para dominar la situación. Ahora bien, esta idea no se le impone más que al nivel en que comienza a razonar a base de la reversibilidad; por ejemplo, a estar seguro de que la distancia comprendida entre *X* e *Y* es igual a la distancia entre *Y* y *X*, etc. En cuanto a la forma de saber cómo se adquiere esta última evidencia, se encuentran las mismas dificultades mientras se aísle semejante adquisición, y la respuesta general no puede consistir, una vez más, sino en invocar una estructura de conjunto que se equilibre progresivamente por exigencias de coherencia interna y de compensaciones que lleven a significaciones intelectualmente satisfactorias y, a la vez, compatibles con la experiencia.

Dicho sucintamente: las evidencias lógico-matemáticas no se constituyen más que en función de estructuras, y éstas no pueden adquirirse sino en función de una colaboración entre experiencias acompañadas de abstracción a partir de acciones (2 b) y equilibramiento, o en función de un simple equilibramiento de la coordinación entre las acciones. Tal es la razón por la que la sucesión de las evidencias no puede producirse al azar, sino que lleva consigo una vección o ley directiva que se traduce en la necesidad de integrar las estructuras y las evidencias anteriores en las estructuras y evidencias posteriores. En cuanto a esta ley de dirección, no cabe que se deba a una estructura general *a priori*, esto es, a una preformación

de todas las estructuras —con las evidencias que conlleven— en una coordinación inicial de las acciones, que las contendrían en potencia, pues el desarrollo natural se efectúa, según hemos dicho ya insistentemente (en el capítulo 7, § 43, y en el capítulo 8, § 46), por medio de una serie de reconstrucciones que exceden lo reconstruido; de modo que, si bien no existen comienzos absolutos en la construcción de las estructuras, no por ello podrá decirse que las más primitivas contengan a todas las que las hayan de suceder. Por ello, no cabe duda de que las primeras estructuras observables en la coordinación de las acciones se remontan, sin duda alguna, a ciertas estructuras inscritas en el sistema nervioso: en un artículo célebre, McCulloch ha hecho ver, por ejemplo, que las conexiones neuronales presentan un estructuración que se puede expresar a base de funtores proposicionales y del álgebra de Boole; pero esto no quiere decir, en modo alguno, que el cerebro contenga anticipadamente las estructuras que se construyan a lo largo del desarrollo: éstas se «construyen» en el sentido propio del término; esto es, unas estructuras ya elaboradas en un plano inferior, y relativamente pobres, se «reflejan» en un plano superior, enriqueciéndose entonces merced a funciones nuevas que se integran a las estructuras anteriores. En cuanto a las estructuras de partida, si es que son innatas, hacen reaparecer el mismo problema en el campo de la construcción biológica.

§ 50. Invención y descubrimiento.—Tanto el problema de las estructuras como el de la adquisición de las evidencias conducen a la cuestión de la naturaleza de la invención matemática; cuestión que ha intrigado desde hace largo tiempo a los psicólogos, pero —como hace notar Beth— sin que la hayan aclarado mucho. Tal vez sería necesario esperar, antes de hablar de ella, a que se haya formulado la tipología objetiva de los matemáticos que desea Beth (véase el final del § 30), pero nos parece que el punto de vista genético lleva, por lo menos a plantear el problema en términos algo renovados, en el sentido de que sugiere la posibilidad de que haya un *tertium quid* entre la invención (o libre creación) y el descubrimiento (o contacto imprevisto con una realidad exterior al sujeto).

Observemos, ante todo, que la doble dicotomía acerca de

la cual insiste Beth en los §§ 27 y 39 (allí, la heurística y la demostración; en éste, plantear un problema y resolverlo) corresponde enteramente a los tres momentos de todo acto de la inteligencia o a las tres funciones elementales de ella, si se apoya uno, por ejemplo, en los trabajos de A. Binet o de E. Claparède; pues, según la terminología de este último autor, la inteligencia consiste: a) en plantear problemas; b) en hacer hipótesis para resolverlos, y c) en controlar las hipótesis mediante una comprobación (empírica o deductiva). El hecho de que estos tres momentos esenciales se encuentren tanto en el dominio del pensamiento lógico-matemático como en los demás nos insta a buscar los mecanismos generales de las funciones propias de la inteligencia.

En lo que concierne al problema de la invención matemática, conviene distinguir dos tipos de cuestiones: la del proceso mental por el cual surja la idea nueva y la de la naturaleza de la novedad (el que se la haya creado de pies a cabeza o que consista solamente en una especie de lectura). Esta segunda cuestión es la de la alternativa entre «invención» y «descubrimiento», mientras que la primera es relativamente independiente de ella.

I. En lo que se refiere a la primera cuestión, casi no tenemos nada que añadir al § 26 de Beth ni a sus dos pertinentes observaciones personales, según las cuales: a) «la fase de preparación descrita por Poincaré y Hadamard no puede suscitar un trabajo inconsciente fructífero más que si el trabajo consciente llevado a cabo durante tal primer período se realiza de modo suficientemente eficaz», y b) el trabajo inconsciente no es puramente automático, sino que «también él está dirigido», y la dirección le está «impuesta, precisamente, durante la fase de preparación».

Lo único que vamos a señalar, en el mismo sentido en que están orientadas sus observaciones, es que conviene recordar que en la esfera del pensamiento, incluso al nivel más elevado (y, a nuestro juicio, asimismo en los dominios afectivos), no hay nada más relativo que la distinción entre lo consciente y lo inconsciente. Esto último no es otra cosa que la expresión de la impotencia de nuestra introspección: no hay dos dominios

mentales separados por una frontera [2], sino uno y el mismo laborar del espíritu, del cual no nos damos cuenta, ni siquiera en los estados más lúcidos, de otra cosa que de una pequeña parte (centrada en los resultados obtenidos y no en el proceso como tal), y que ignoramos casi totalmente cuando no tratamos de fiscalizarlo de cerca. Por recoger la distinción que acabamos de recordar entre las cuestiones de la hipótesis y de su control: somos relativamente conscientes de las preguntas que nos planteamos (relativamente porque no siempre las disociamos enteramente de otras cuestiones conexas vinculadas inconscientemente con ellas), cada vez más conscientes de las fases del control y de la demostración, pero la construcción de la hipótesis se nos escapa casi enteramente, de suerte que su aparición en el campo de la conciencia resulta misteriosa incluso en los casos más sencillos. Alfred Binet, que se esforzó por seguir los pasos y procesos de la inteligencia por un método de introspección provocada, concluyó con esta desengañada salida: «el pensamiento es una actividad inconsciente del espíritu»; y Claparède, que trató de captar el mecanismo del «nacimiento de la hipótesis» por un método de reflexión hablada (simplemente, acostumbraba a los sujetos a pensar en voz alta), concluyó que no era posible resolver semejante problema en el plano de los datos de la conciencia.

Ahora bien, toda distribución entre «conciencia» e «inconsciente» en el proceso de la invención matemática es siempre relativa a los defectos de nuestra introspección. Así, el topólogo Leray, que sabe por experiencia lo que es una invención, ha llegado a sostener (en un debate oral en el *Institute for Advanced Studies*, de Princeton) que cuando se la considera de cerca, la idea original cuya novedad caracteriza un descubrimiento no parece surgir del inconsciente en un momento de iluminación más que porque se había olvidado que ya antes se la había tenido. Según Leray, el trabajo creador consiste primeramente en una serie de tentativas en los sentidos más diversos, tentativas a las que el que las realiza no atribuye igual importancia, ya que unas parecen más seguras (por estar orientadas en las

---

2 Freud dotó a esta frontera imaginaria de una «censura», que no es otra cosa que el negarse —interesada o tendenciosamente— a ver claro en ciertos aspectos de uno mismo.

direcciones clásicas, pero que de hecho no bastan para llevar a la solución del nuevo problema) y otras más aventuradas (justamente por estar orientadas hacia algo nuevo); entre estos intentos aventurados puede encontrarse la idea certera, pero no se le atribuye inicialmente ningún valor, de tan contraria que parece a lo que se hubiera pensado hasta el momento; al proseguirse de esta forma la tarea, la conciencia se encuentra cada vez más atestada, de igual manera que una pizarra en la que se escribieran muchas fórmulas, para no olvidarlas, y que terminase por tener hasta los últimos rincones ocupados por notaciones cada vez menos legibles. Entonces se para el trabajo de la fase de preparación y se entra en una segunda fase, caracterizada por detenerse la búsqueda y por el trabajo subyacente que Poincaré atribuía al automatismo inconsciente; ahora bien, según Leray, el inconsciente no desempeña entonces más que un papel puramente negativo, el de borrar de la pizarra todos los desarrollos inútiles y no retener más que lo importante. Y al volver de nuevo a esforzarse conscientemente, se percata uno de que no dispone más que de unas pocas direcciones de investigación y de que aquella cuyo interés se había desdeñado presenta un aspecto más serio de lo que parecía; en este caso se llega rápidamente a la solución buscada, que puede parecer completamente nueva, pero sólo porque se olvida que se la había entrevisto de pasada.

Incluso sin haber descubierto nada jamás en matemáticas, no se puede por menos de reconocer lo frecuente que es el proceso así descrito por Leray. Por ejemplo, hemos tenido a menudo la impresión de encontrar una idea nueva, pero cuando intentábamos sacar partido de ella, poníamos la mano sobre unas notas olvidadas en las que figuraba ya, aun cuando apenas disociada de un contexto carente de interés. Y también en el niño sucede a veces, en interrogatorios libres por medio de los cuales estudiamos la solución de los problemas planteados, que el sujeto enuncia la solución correcta mucho antes de creerla, y que no vuelve sobre ella, sino tras haber recorrido otras hipótesis peores (y sin conciencia alguna de que vuelve a hallar una posibilidad ya considerada anteriormente).

No obstante todo ello, si bien la observación de Leray con-

tribuye a señalar el carácter relativo de las móviles fronteras entre la conciencia y el inconsciente, no creemos que conduzca, en modo alguno, a suprimir la existencia de este último: primeramente porque un inconsciente que sabe seleccionar lo útil y lo inútil en una pizarra da pruebas de inteligencia, y luego porque una hipótesis que surja en un tantear consciente no deja de tener por eso una génesis inconsciente.

Lo que hay que reconocer plenamente, en cambio, es que el inconsciente no crea nada por sí solo, indudablemente, al nivel del pensamiento representativo (frente a lo que sucede con el inconsciente puramente motor): puesto que todo trabajo del pensamiento involucra una búsqueda consciente y un mecanismo inconsciente, la pregunta que quiere saber si la creación es consciente o inconsciente está mal planteada. Las únicas cuestiones que ofrecen interés son las relativas a precisar las circunstancias de la «toma de conciencia» y las lagunas, o incluso las ilusiones sistemáticas, propias de toda introspección (que consiste en un intento de dirigir la toma de conciencia de manera opuesta a sus manifestaciones espontáneas).

II. Ahora se comprende por qué la introspección del matemático no puede resolver la cuestión de saber si la invención matemática es una invención propiamente dicha (esto es, una creación por el pensamiento del sujeto) o un descubrimiento (o sea, el encuentro por el sujeto de una realidad existente con anterioridad a su indagación)[3].

Es sabido, en primer lugar, que en el dominio afectivo la introspección presenta dos vicios ligados a su misma naturaleza: 1) es incompleta, ya que ignora siempre las raíces profundas e históricas de los sentimientos que se experimenten en un momento dado (cf. el psicoanálisis), y 2) es tendenciosa, pues es imposible contemplarse sin juzgarse: por lo general, con demasiada indulgencia (autojustificación), a veces con un exceso de severidad (sentimientos de inferioridad), y en la mayoría

---

[3] Cosa que, naturalmente, no es decir que la introspección sea, por consiguiente algo desdeñable; si así fuese, ni este problema de la invención ni la mayoría de las cuestiones matemáticas podrían haberse planteado; sólo que la introspección, precisamente, suscita problemas, pero no basta para resolverlos. En las conclusiones generales volveremos sobre este punto.

de los casos con ambas cosas. En cuanto al dominio de lo intelectual, conviene recordar, ante todo, que toda conducta, incluida la demostración del teorema más abstracto, es al mismo tiempo cognoscitiva (búsqueda de la verdad) y afectiva (interés, esfuerzos, ardor, depresión, fatiga, sentimientos estéticos, etc.); pero incluso en lo referente al aspecto intelectual de la conducta, la introspección presenta los dos mismos defectos: 1) es lacunar, dado que el mecanismo de la indagación elude como tal la conciencia, frente a lo que sucede con su dirección (la cuestión planteada), con sus resultados parciales (emergencia de las hipótesis) o totales y con la verificación retroactiva (demostración), y 2) es tendenciosa, ya que es imposible introspeccionar el propio pensamiento sin tomar partido, más o menos inconscientemente, en favor de las creencias a las que se encuentre uno vinculado. Pero estas creencias son tanto más tenaces cuanto más fundamentales sean (platonismo, idealismo, nominalismo, etc.), de modo que no cabe que la introspección del matemático pueda servir de instrumento demostrativo en una cuestión esencial, como es la de la invención o el descubrimiento, por sólida que sea su capacidad demostrativa en cuanto a la verdad o falsedad de las relaciones que existan entre los entes matemáticos (sobre los que se puede razonar desconociendo cuál sea su naturaleza).

Siendo así las cosas, sería vano intentar resolver psicológicamente este gran problema sin disponer de gran número de datos (actualmente poco menos que inexistentes) sobre la génesis real de las ideas en los matemáticos creadores. Por el contrario, puede ser útil hacer ver que no hay una simple alternativa entre la invención creadora y el descubrimiento, y que es al mismo tiempo posible y —acaso— más verosímil una tercera solución.

Admitamos, por hipótesis, que, como habíamos sugerido antes (en el capítulo 8, § 48), toda «abstracción reflectora» consista en reconstruir una estructura anterior en un plano superior, en la que quede integrada en una estructura más amplia. En tal caso será posible una regresión infinita, en lo que se refiere a la vida mental; por lo que tal vez haya de buscarse el punto de partida en las estructuras nerviosas, en primer término, y, fi-

nalmente, en las estructuras orgánicas en general —que se manifiestan, entre otros modos, en la morfogénesis vital, accesible a la observación (si es que no ya a la experimentación).

Ahora bien, debemos percatarnos a este respecto de que en las estructuras orgánicas existe una abundancia extraordinaria de formas matematizables: todo ser vivo está ordenado de acuerdo con distintos planos de simetría; se ha podido mostrar la existencia de cierto número de notables transformaciones geométricas (topológicas, proyectivas, afines, etc.) en la evolución de las formas de los peces, los moluscos testáceos, etc [4]; cierto número de reacciones obedecen a leyes bivalentes, del tipo de todo o nada; y, en resumen, parece evidente que pronto o tarde se construirá una geometría de las estructuras orgánicas, que será análoga a la física matemática.

En cuanto a las relaciones noogenéticas entre las estructuras físicas y las orgánicas sólo es preciso decir lo que sigue: 1) que no conocemos las primeras más que por experiencia externa; 2) que tampoco conocemos las segundas más que por experiencia externa (y jamás interna, pues no hay introspección de las estructuras nerviosas ni, *a fortiori*, de las de nuestro organismo); 3) que, por el contrario, la existencia de estructuras orgánicas constituye una condición previa para el funcionamiento psicológico del pensamiento del sujeto, ya que tal pensar presupone que haya unas estructuras sensorio-motrices [5], cuya vinculación con las estructuras nerviosas y orgánicas es directa; y 4) que la existencia de estructuras físicas no constituye, al menos en un sentido idéntico al anterior, una condición previa del funcionamiento intelectual del sujeto, dado que —aun suponiendo que no suceda tal cosa en los estadios iniciales— cabe pensar sin objeto exterior y sin apelar a la experiencia (recuérdense las matemáticas «puras»); y si las estructuras orgánicas suponen unas estructuras físicas (por ejemplo, porque ellas mismas constituyan un derivado diferenciado de éstas), estas últimas se contarán entre las condiciones pre-

---

4 D'ARCY THOMPSON, *On Growth and Form* [«Sobre el crecimiento y la forma»], Cambridge, 1942.

5 Las «operaciones» del pensamiento son, en efecto, acciones interiorizadas, cuyas raíces son sensorio-motrices.

vias del pensamiento por mediación del organismo, y no de la experiencia externa.

Una vez admitido esto, si las estructuras orgánicas constituyen condiciones previas para el funcionamiento psicológico del pensamiento, puede asimismo suceder que desempeñen un papel de condiciones previas desde el punto de vista epistemológico, lo cual significaría, simplemente, que las «abstracciones reflectoras» por medio de las cuales los elementos de una estructura dada se sacan de una estructura anterior no involucrarían un punto de partida absoluto, y que incluso las estructuras sensorio-motrices (que conllevan ya formas elementales de «grupo», como ha hecho ver Poincaré en cuanto a los desplazamientos) se extraerían de otras más elementales por un proceso análogo de «abstracción reflectora».

Estas consideraciones, que a primera vista pueden parecer muy ajenas al problema de la invención matemática, son, por el contrario, a nuestro juicio, de una índole tal que permiten comprender que entre la invención creadora y el descubrimiento de seres exteriores al sujeto exista la posibilidad de un *tertium quid*.

Toda invención es la creación de una combinación nueva y libre, no realizada hasta entonces ni en la naturaleza ni en el espíritu de los sujetos, por más que los elementos así combinados de manera nueva se conociesen previamente (cosa que acaso ocurra siempre): por ejemplo, la creación de la locomotora de vapor es una invención, en el sentido de una combinación entre el vapor y el vehículo, que uno y otro se conocían antes de ella. E igualmente habrá que hablar de una «invención» del esperanto, puesto que las combinaciones de las que ha salido esta lengua eran a la vez nuevas y «libres», esto es, podrían haber sido distintas.

Todo descubrimiento es el encuentro entre un sujeto y un objeto hasta entonces desconocido para él, pero que existiese como tal antes del encuentro: por ejemplo, el descubrimiento de América. Puede hablarse también de un descubrimiento interior, en el sentido de que el objeto descubierto sea un elemento o una propiedad del sujeto que éste ignorase hasta aquel momento, pero existente en cuanto tal antes de haberse caído

en la cuenta de él: y de este modo se han descubierto las imágenes mentales y las asociaciones de ideas. Finalmente, cabe descubrir un objeto mediante el raciocinio, según hizo Leverrier con Neptuno; y no hay nada que impida que lo mismo ocurra con entes abstractos.

Una vez planteadas estas definiciones, se advierte que una construcción matemática nueva puede aparecer, según los casos, como invención o como descubrimiento, e incluso como una tercera cosa que sea preciso examinar para ver si es, simplemente, ambas cosas a la vez o ninguna de ellas.

Distingamos, ante todo, las innovaciones consistentes en una nueva demostración de un teorema ya conocido de las que residan en asentar nuevas relaciones (nuevos teoremas) entre entes ya conocidos y de las que consistan en caracterizar nuevos entes matemáticos. Es obvio que clasificaremos inmediatamente las innovaciones de la primera categoría entre las invenciones (en el sentido que acabamos de definir), y las de la segunda entre los descubrimientos. Pero hay cierta arbitrariedad en ello, puesto que la nueva demostración puede limitarse a sacar a luz nuevas relaciones que no se hubieran advertido hasta entonces e interpretables como simples «descubrimientos»; en cuanto a los nuevos teoremas que se refieran a relaciones no vistas anteriormente, pueden ser solidarios de una teoría de conjunto, o incluso de una nueva estructura; lo cual, por una parte, hace indecidible la pregunta acerca de si es «invención o descubrimiento» y, por otra, acerca esta segunda categoría a la tercera.

Así pues, el problema se plantea con toda su acuidad acerca de la tercera categoría. La generalización de la operación de extraer raíces hasta el punto de aplicarla a los enteros negativos, construyendo así el número imaginario $\sqrt{-1}$, pudo parecer el modelo de la invención artificial (y de ahí las expresiones de números «fingidos», «imaginarios», etc.), mientras que el destino posterior de las funciones complejas ha tendido a ascender esta invención al rango de descubrimiento. Para Cantor, los números transfinitos respondían al modelo de un auténtico descubrimiento, mientras que, de acuerdo con la curiosa cita de Poincaré que Beth recuerda arriba (§ 30), para

Hermite no se trataba más que de una especie de invención casi profanadora, ya que tendería a alcanzar la naturaleza de los seres infinitos mismos, pero fracasando en su intento.

Ahora bien, parece claro que si, desde el punto de vista psicológico, las construcciones matemáticas nuevas proceden por «abstracción reflectora» [6], no cabe clasificarlas ni entre las abstracciones ni entre los descubrimientos, en los sentidos respectivos que acabamos de definir. ¿Es preciso, entonces, concebir este *tertium quid* como algo que simplemente participa al mismo tiempo de los dos procesos, pues el nuevo ente se habría «descubierto» en parte por extraerse de una estructura anterior, y en parte estaría «inventado», en la medida en que tal estructura daría así lugar a desarrollos originales no contenidos en ella (la cual, simplemente, los haría posibles)? A nuestro entender, no es posible interpretar las cosas de una forma tan sencilla, por las dos razones siguientes:

1) En primer lugar, la «abstracción reflectora» no es un descubrimiento, ya que la estructura o ente que haya experimentado la «reflexión» no es idéntico a aquel del que se haya extraído. Desde el punto de vista del desarrollo mental, importa recordar, ante todo, que ni la abstracción dicha ni la experiencia que abstrae a partir de acciones y no de objetos (forma de experiencia a la que está vinculada a menudo la «abstracción reflectora», aun cuando puede funcionar sin tal apoyo) se confunden con la «experiencia interna» (en el sentido, por ejemplo, en que Helmholz creía que era posible extraer los números ordinales o la idea de orden de la sucesión de estados de conciencia); de ahí que cuando el niño descubre por experiencia el resultado de una acción, por ejemplo, que el resultado de una suma es independiente del orden que se siga (lo cual es, desde luego, una propiedad de las acciones de reunir y orde-

---

[6] Lo cual equivaldría a suponer que las creaciones matemáticas de carácter «científico» prolongan en niveles cada vez más elevados el desarrollo mental mismo. Es obvio que una hipótesis tan pregnante pide que se la examine de cerca, cosa que haremos en los capítulos 10 y 11; pero como aquí no intentamos más que hacer ver que *es posible* que haya un *tertium quid* entre la invención y el descubrimiento, sin pronunciarnos en cuanto al fondo de la cuestión, por falta de datos suficientes, acaso se nos tolere esta anticipación.

nar, y no una propiedad de los objetos como tales, que no involucran ni suma ni orden algunos independientemente de las acciones que se ejerzan sobre ellos), la «abstracción reflectora» consista en traducir una sucesión de actos materiales en un sistema de operaciones interiorizadas cuyas leyes se comprendan en un acto simultáneo. Por consiguiente, hay en ello más que un simple descubrimiento, ya que se reconstruye en un plano mental nuevo, cuyo funcionamiento es distinto, y que tal reconstrucción conduce a una estructura más general: el objeto descubierto se enriquece así con el descubrimiento, el cual es, por lo tanto, según la definición de que hemos partido, algo más que un descubrimiento.

En cuanto a las creaciones de los matemáticos, con ellas sucedería *a fortiori* lo mismo si procediesen también por «abstracción reflectora». En un artículo del que volveremos a hablar a propósito de la intuición (en el § 51), A. Denjoy[7] busca el origen de lo transfinito en la intuición del paso al número límite de una sucesión (persecución de la tortuga por Aquiles, etcétera), intuición a la que califica unas veces de innata y otras de empírica, pero que descansa sobre una experiencia en la que se abstrae a partir de la acción; sin embargo, aun suponiendo que G. Cantor haya partido de tales intuiciones, así como de la de la correspondencia biunívoca, el descubrimiento de lo transfinito sería mucho más que un «descubrimiento» en el sentido arriba definido, dado que la nueva estructura así elaborada excede aquélla de la que se la habría sacado. Por el contrario, en la interpretación platonista de Cantor sería obvio que se trataría de un «descubrimiento»; pero aquí nos estamos limitando a mostrar la posibilidad de un *tertium quid*, sin tratar de llegar a una decisión entre las tres hipótesis.

2) Mas si bien una construcción que proceda por «abstracción reflectora» es más que un descubrimiento, tampoco se reduce a una «invención» en el sentido arriba definido de combinación nueva y libre, ya que los elementos nuevos que

[7] A. Denjoy, «L'inneité du transfini», en *Le Lionnais*, op. cit., páginas 188-95 [vers. cit., págs. 199-207].

intervienen añadiéndose a los descubiertos no son nunca «libres»: o sea, que no podrían haber sido distintos. La invención del esperanto es invención estricta, puesto que el vocabulario y la sintaxis de esta lengua artificial proceden de combinaciones nuevas, y éstas eran «libres» (prueba de ello es que el volapuk y el ido han utilizado otras); pero lo propio de las construcciones matemáticas, por el contrario, supuesto que se las reconozca como válidas posteriormente (utilizándolas a un nivel ulterior, en cuanto al desarrollo mental, o por control sistemático en lo que concierne a las creaciones científicas), es que su grado de libertad no afecta más que a la manera de demostrarlas y formalizarlas, en tanto que los teoremas fundamentales se imponen necesariamente. Adoptando la perspectiva de Kronecker, según la cual los números naturales son un regalo de Dios y todas las demás variedades de números se deben a la fabricación humana, no por ello deja de suceder que esta fabricación no podría haber sido distinta.

Desde el punto de vista psicológico, lo propio de la construcción y de la creación matemáticas parece ser, pues, que no se reducen ni a descubrimientos ni a invenciones, sino a una sucesión indefinida de combinaciones al mismo tiempo nuevas y, sin embargo, interiores a un sistema de posibilidades bien determinadas. El problema consiste, entonces, en saber si se tiene derecho a hablar de «sistema» y de «determinación necesaria» acerca de puras posibilidades; dicho de otra forma, en si se puede razonar sobre ellas y decir algo que tenga alguna validez antes de que se las haya actualizado en operaciones efectivas, y, por consiguiente, antes de que hayan dejado de no ser más que posibilidades. En efecto, sólo posteriormente, es decir, en el momento de la construcción efectiva, es cuando se percata uno del hecho de que las combinaciones nuevas eran necesarias y no arbitrarias; y querer conocer las posibilidades antes de su actualización consistiría, por lo demás, en construir unas operaciones efectivas para poder hablar de ellas, lo cual equivaldría, una vez más, a actualizarlas. Ello no impide, naturalmente, que adhiramos ciertas creencias a semejante conjunto de puros posibles, como la del platonismo, que en definitiva hipostasía tales posibilidades en seres ideales o como las que

admiten un sujeto trascendente o divino que contendría en sí todos esos posibles; pero no son otra cosa que creencias mientras no se le proporcionen al sujeto humano instrumentos para conocer tales entes ideales o *a priori*. Todo cuanto puede decirse comprobablemente acerca de las relaciones entre los posibles y su actualización en una construcción lógico-matemática es que, hablando genéticamente, una estructura observada a un nivel dado del desarrollo contiene siempre más generalizaciones posibles (por ejemplo, prescindiendo de una restricción, o abstrayendo una nueva transformación) que las que perciba el sujeto: por ejemplo, cuando McCulloch encuentra en las conexiones neuronales diversas combinaciones correspondientes a los funtores proposicionales (., V, ⊃, |, =, etc.), es obvio que no atribuye por ello al cerebro la propiedad de contener las 16 operaciones binarias, las 256 operaciones ternarias, las 65.536 cuaternarias, etc., de la lógica de proposiciones bivalente; y sin embargo, todas estas combinaciones serían posibles si se da el punto de partida. Por lo tanto, hay que distinguir siempre, junto a cada estructura realizada de hecho, el conjunto de posibilidades que implique, por más que el sujeto mismo no se dé cuenta de ellas; y la «abstracción reflectora» propia de los estadios ulteriores consistirá, precisamente, en sacarlas a la superficie, construyendo con tal objeto una nueva estructura. Pero razonar sobre el conjunto de todos los posibles, en general, es otro asunto, y la ilegitimidad de los razonamientos de este género es lo que nos impulsa a creer que la construcción matemática no es ni una invención ni un descubrimiento, en el sentido ordinario de estos términos, sino un proceso *sui generis*, para decir del cual algo seguro habría que conocer las estructuras lógico-matemáticas inherentes a todos los niveles del desarrollo, hasta llegar a las mismas estructuras orgánicas y morfogenéticas.

§ 51. Las múltiples formas de la «intuición» matemática.— No hay nada más difícil de comprender para un psicólogo que lo que los matemáticos entienden por intuición (o bien, por intuciones, ya que distinguen múltiples formas de ella). La razón reside, evidentemente, en que los matemáticos, que no se

fían jamás de la sola intuición, no elaboran la teoría correspondiente y la consideran como algo que o bien corresponde al sentido común o a la investigación filosófica o psicológica, desentendiéndose así del cuidado de analizarla; pero el sentido común no tiene en psicología más competencia que en matemáticas, y no constituye otra cosa que la cristalización de una psicología introspectiva ni crítica ni genética, con todas las dificultades que hemos recordado en cuanto a la posibilidad misma de una introspección que posea validez (capítulo 7, § 43); en cuanto a la filosofía, no puede decir nada de la intuición sin enunciar al respecto afirmaciones de hechos, cuya fiscalización corresponde, por ello, a la psicología científica. Por consiguiente, sólo queda la psicología; pero precisamente a los psicólogos les es algo dificultoso captar lo que en matemáticas se entiende bajo el término de intuiciones.

Conviene, pues, comenzar planteando tres cuestiones previas:

1) ¿Existe algún proceso o algún rasgo común a las distintas variedades de conocimientos a las que se llama «intuiciones»?

2) ¿En qué difieren entre sí las distintas formas de «intuición»: por características diacrónicas (= genéticas), por sincrónicas o por ambas? Dicho de otro modo, tal intuición ¿es característica de un número limitado de estadios del desarrollo y, por tanto, de un número limitado de niveles de la jerarquía de las funciones (percepciones, operaciones concretas, etcétera), o constituye una función general que se encuentre a todos los niveles y que pase por sus propios estadios de desarrollo?

3) En caso de que se trate de una función general (como, por ejemplo, en la perspectiva de Gonseth, que cree poder encontrar en todas las etapas la trilogía de experiencia, intuición y deducción más o menos formalizada), ¿qué marcha manifiesta en el curso del desarrollo: progresiva o, por el contrario, regresiva? Por ejemplo, si bien las técnicas experimentales y las deductivas progresan constantemente en el curso de la historia y en el del desarrollo intelectual del individuo (hasta llegar

a la regresión senil o, simplemente, postescolar), ¿asistimos también a un progreso de la intuición o de alguna de sus variedades, ya sea progreso en extensión o en afinamiento cualitativo? O, al revés, ¿no asistimos, o bien a una disgregación de las intuiciones en fiscalizaciones experimentales, por una parte, y deductivas, por otra, o a una reducción gradual del papel de la intuición?

Antes de contestar de modo general a estas preguntas, puede ser útil que las consideremos primeramente dentro del marco de algunos dominios particulares de «intuiciones», tales como las del tiempo, las del espacio, etc.

I. *La intuición del tiempo.*—Independientemente de cierto número de observaciones de gran finura, pero inspiradas en gran parte por W. James (el «stream of consciousness» [el flujo de la conciencia]), el análisis que ofrece Bergson de la intuición de la duración no presenta más que un interés psicológico relativo, y está influido, sobre todo, por el deseo de justificar una epistemología de los «datos inmediatos», así como una concepción irracionalista (o, más bien, transracionalista) de la intuición en general. La psicología del tiempo es, de hecho, mucho más compleja.

En efecto, cuando se toman en consideración los datos genéticos [8] y los niveles jerárquicos del conocimiento del tiempo en el adulto medio se observan los siguientes peldaños:

1) Primeramente se encuentra el tiempo sensorio-motor [9], con sus dos aspectos de orden de sucesión (por ejemplo, la ejecución de un movimiento que sirva de medio antes de efectuar el que señale la consecución del objetivo) y de duración (por ejemplo, la impaciencia en caso de espera).

2) Luego viene el tiempo perceptivo, que indudablemente está subordinado al anterior: percepción de las sucesiones y las simultaneidades (con toda clase de errores sistemáticos en función de los puntos de referencia, de las distancias, las ve-

---

[8] Cf. J. PIAGET, *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*, París (P. U. F.), 1946, y P. FRAISSE, *Psychologie du temps*, París (P. U. F.), 1957.

[9] Cf. J. PIAGET, *La construction du réel chez l'enfant* (Delachaux), capítulo 4.

locidades, etc.), y percepción de las duraciones subordinada a la de las sucesiones, que por término medio es exacta para un punto neutro de 0,6 a 0,7 segundos, pero con sobrestimaciones sistemáticas por debajo y con subestimaciones por encima de él [10].

3) Entre el tiempo propiamente perceptivo y el del nivel de las operaciones concretas se encuentra toda una zona a la que podría llamarse del tiempo vivido, y que es, sin duda alguna, a la que se refería Bergson en sus descripciones de la duración pura. Se trata de un tiempo que no es puramente perceptivo, ni tampoco está aún estructurado operatoriamente, pero que muestra ya semiestructuraciones, y que se encuentra en el niño (antes de los ocho a nueve años) en sus evaluaciones del tiempo físico: es el tiempo que parece durar más cuando está vacío o se aburre uno, se siente cansado, etc., y durar menos cuando hay actividad, interés, etc.

Pero este tiempo de nivel 3) no tiene nada de intuición directa ni simple, y da muestras de poseer una composición relativamente compleja. Para comprenderlo es preciso saber que la percepción y la noción de velocidad son inicialmente independientes de las de duración, y no implican otra cosa que un orden espacial y temporal [11]; así pues, por el contrario, es la duración la que psicológicamente se comporta como una coordinación de velocidades: esto es, la duración se evalúa, ya sea por el espacio recorrido con relación a la velocidad, ya por el

---

10 Cf. P. Fraise, *Psychologie du temps*, París (P. U. F.).

11 En efecto, hasta llegar a cierta edad, la velocidad se concibe gracias a la noción del adelantamiento, que es puramente ordinal e independiente de la duración. Adviértase que esta observación psicológica (véase J. Piaget, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, París, P. U. F., 1946) se ha podido utilizar en física; pues dos físicos franceses, J. Abele y Malvaux (*Vitesse et Univers relativiste*, París, Sedes), tratando de evitar el conocido círculo vicioso de la velocidad y del tiempo, han logrado reconstruir los conceptos de partida de la teoría de la relatividad partiendo de esta noción del adelantamiento, que genéticamente es inicial: completando ésta mediante una ley logarítmica y un grupo abeliano, definen una función aditiva de los adelantamientos y vuelven a hallar la regla relativista de la composición de velocidades; y luego, introduciendo una «distancia cinemática» entre dos velocidades constantes, llegan a las transformaciones de Lorentz y, sobre todo, a una expresión única para la masa en movimiento (de donde se obtiene la ley de la isotropía de la velocidad de la luz).

trabajo efectuado con relación a la potencia empleada. Es probable, pues, que las ilusiones sistemáticas del tiempo vivido procedan de haber establecido la relación de manera incompleta, bien porque dominen las consideraciones del interés, bien lo hagan el esfuerzo o la fatiga (que traducen la regulación de las fuerzas a disposiciones del individuo: el interés y el esfuerzo aumentan el rendimiento, etc.).

4) Así pues, el tiempo físico y, hasta cierto punto, el mismo tiempo vivido acaban por estructurarse en función de unas operaciones que se constituyen espontáneamente con anterioridad a toda comprensión de la cronometría, y que son lo único que hace posible esta comprensión. Son, en primer lugar, las operaciones de seriación, que tienen a su cargo el orden de sucesión de los acontecimientos (conviene insistir, a este respecto, sobre el hecho de que, frente a lo que dicen las interpretaciones bergsoniana y freudiana de la memoria, ésta no es una grabación integral de los sucesos que conservase automáticamente su orden, sino, por el contrario, una reconstitución activa, que introduce un orden de sucesión por vía casi inferencial); luego viene el encajamiento sucesivo de unas duraciones en otras; y después, merced a una síntesis del orden de sucesión y de este encajamiento de intervalos, aparece la métrica temporal espontánea, cuyas manifestaciones son evidentes en la música más popular, en la métrica de la poesía, en los sonidos largos y breves de ciertas lenguas, etc., que es la fase en la que se constituye la duración operatoria, $t = e/v$, como coordinación de velocidades.

Al recordar estos hechos saltan a la vista las dificultades de la idea de una intuición del tiempo. Pues si se quiere caracterizar la intuición como conocimiento «inmediato» (y éste es el tipo de servicio que se espera de tal idea), se hace referencia a los niveles 1) a 3), pero entonces se tropieza con tres tipos de dificultades: a) estas intuiciones son ya complejas; b) son engañosas, puesto que están manchadas por errores sistemáticos, y c) no constituyen sino etapas transitorias, cuyas formas de organización tienden por sí mismas a equilibrarse bajo la forma 4). Y si, en cambio, denominamos intuitivas a las estructuraciones de la forma 4), ya no se trata de conocimientos «in-

mediatos», sino de una *intuición operatoria*, que lleva en sí, como algo propio, una lógica inmanente que se completa en la cronometría técnica y científica.

Estas dificultades se manifiestan con especial nitidez en los equívocos propios de toda tentativa de reducir el número a la «intuición» del tiempo, de Kant y Helmholz a Brouwer. Helmholz ha sido quien ha dado la versión más psicológica de semejante hipótesis [12], al tratar de extraer el número ordinal de la sucesión temporal de los estados de conciencia: como tal sucesión nos es conocida —según él— por experiencia interna directa, nos bastaría distinguir los estados sucesivos marcándolos convencionalmente para obtener una sucesión de números de orden y, a partir de aquí, una definición de la adición ordinal y de la igualdad de dos números ordinales, adición e igualdad que se fundarían exclusivamente sobre las sucesiones.

Pero la dificultad central de esta tentativa de fundar el número sobre una intuición empírica de la sucesión temporal es que no hay «experiencia» o intuición empírica que consista simplemente en extraer de unos objetos (aun cuando sean internos y estén constituidos por la sucesión de los estados de conciencia) un orden de sucesión contenido en ellos; dicho de otro modo, para percibir o concebir un orden de sucesión en una serie de acontecimientos (ya sean internos o externos), hay que introducirlo por medio de las acciones mismas gracias a las cuales se perciba o se conciba. Por ejemplo, percibir que el acontecimiento *B* sucede al *A* en el tiempo, o que el objeto *B* sigue al objeto *A* en un fila espacial, es poner en relación de sucesión la percepción de *B* con la de *A*, o llevar la mirada de *A* a *B*, etc.; y este orden inherente a la actividad perceptiva es la condición previa del orden percibido en los acontecimientos o los objetos. Con mayor razón, cuando se trata de una sucesión de *n* estados de conciencia vividos en contigüidad inmediata (esto es, únicamente comparables dos a dos en el momento en que se los viva), el conocimiento de esta sucesión supone la memoria, y ésta no consiste en «leer» o registrar un orden ya establecido, sino, por el contrario, en reconstituirlo activa-

---

[12] HELMHOLZ, «Zählen und Messen» [«Contar y medir»], *Wisenschaftliche Abhandlungen von H. von Helmholtz,* tomo III.

mente. En resumen, no hay intuición del orden temporal en el sentido de aprehensión directa, sino sólo en el de construcciones o reconstrucciones que implican una intervención previa del orden en el seno mismo de las actividades que valgan para tales construcciones o reconstrucciones.

De ahí que el orden, en general, y el orden temporal, en particular, no constituyan datos intuitivos en el sentido ordinario de la palabra: no conocemos el orden por abstracción a partir de objetos (aunque fuesen estados de conciencia), sino por abstracción a partir de acciones que ordenen. Tal abstracción, pues, pertenece al tipo de las «abstracciones reflectoras», de modo que para darse cuenta del orden dicho de las acciones es necesario construir un orden de nivel superior (de representaciones, etc.) que sea una réplica o modelo de aquél; y esta es la razón por la cual el tiempo sensorio-motor, la percepción del tiempo, el tiempo vivido preoperatorio, etc., se prolongan tarde o temprano en un tiempo operatorio, que recurre a operaciones ordenatorias más generales. Es patente, pues, que derivar el número del orden temporal constituye un rodeo inútil, y que basta partir de las operaciones de ordenación, por más que eventualmente las completemos con otras (véase más adelante, capítulo 11, § 56).

Es natural, por lo tanto, que Brouwer haya reemplazado la intuición temporal por cierta intuición de la «multi-unidad», que es mucho más idónea para servir a la construcción de los números naturales. Pero lo mismo que sucedía con la intuición fundamental de $n + 1$ o de la iteración, en la que creía Poincaré, ahora se plantea la cuestión de puntualizar en qué sentido quepa considerar intuitivas estas clases de evidencias; cosa que suscita todo el problema de las intuiciones operatorias, cuya naturaleza no tiene mucho en común con las intuiciones perceptivas ni con las que descansan en la representación mediante imágenes.

II. *Las intuiciones espaciales.*—La mayoría de los autores hablan como si los conocimientos que tenemos del espacio se redujesen a tres variedades: en un extremo, las percepciones empíricas referentes a objetos o a dibujos que representen sus contornos; en el otro, unos entes abstractos, que darían pie

para la formalización, y, entre los dos, cierta intuición geométrica, a cuyo respecto habría que ver si se deriva o no de los datos perceptivos o empíricos y si es necesaria o no para construir los sistemas axiomáticos.

Recordemos ante todo los datos genéticos [13], que son mucho menos simples, y tratemos de situar con relación a ellos las posibles variedades de intuición espacial. En cuanto a esto cabe distinguir los siguientes niveles:

1) Primeramente existe un espacio sensorio-motor, dentro del cual se pueden ya distinguir seis estadios (entre el nacimiento y los 18 meses). Tomando únicamente en consideración los términos extremos, hay que decir que este desarrollo sensoriomotor comienza con un conjunto de espacios sin relación mutua (espacios bucal, táctilo-cinestésico, postural, visual y auditivo), todos centrados sobre el propio cuerpo, el cual, por su parte, en su conjunto no está situado en el espacio; y al llegar al término del desarrollo de que ahora hablamos, tales espacios inicialmente heterogéneos se han coordenado en un espacio único, que comprende los objetos y el propio cuerpo (como un objeto más entre los otros) y está caracterizado por ciertas estructuras fundamentales: permanencia de los objetos cuando salen del campo perceptivo (la cual no es, en modo alguno, algo innato, sino que se la ha adquirido en el curso de una larga construcción, a cuyo través el objeto se convierte en un invariante con relación al grupo siguiente) y coordinación de los desplazamientos y las posiciones en un «grupo» de índole simplemente práctica (sin representaciones pensadas), pero que ya garantiza un descentramiento general con respecto al propio cuerpo.

2) En segundo término, se encuentra un espacio perceptivo, que a los comienzos está comprendido en el precedente pero que luego se va diferenciando de él poco a poco y proporciona una aprehensión de las formas, las dimensiones, las posiciones y las distancias. Este espacio incluye ciertos elementos inna-

13 Véanse: PIAGET, *La construction du réel chez l'enfant* (Delachaux et Niestlé [vers. cast.: *La construcción de lo real en el niño*, Buenos Aires, Proteo, 1965]), capítulos 1 y 2; PIAGET e INHELDER y SZEMINSKA, *La géometrie spontanée de l'enfant*, París (P. U. F.).

tos, pero imposibles de disociar de los adquiridos o construidos; y, por otra parte, tal construcción perceptiva se enriquece constantemente con influencias procedentes de la acción en su conjunto (I. Kohler, por ejemplo, ha mostrado que cuando se llevan constantemente puestas unas gafas de espejo que vuelvan «cabeza abajo» los objetos, la visión los endereza totalmente al cabo de algunos días, por la influencia ejercida por las reaferencias vinculadas al conjunto de la acción) o de las operaciones intelectuales (por ejemplo, en lo que concierne a las coordenadas perceptivas, etc.). Así pues, es necesario ser muy prudente cuando se hable del espacio perceptivo de los adultos, ya que con frecuencia se le atribuyen muchos elementos de origen no perceptivo.

Si se atiene uno a los datos puramente perceptivos [14], se comprueba, por lo pronto, que obedecen a leyes bastante alejadas de las de la geometría, e incluso de la lógica: ya H. Poincaré, en sus reflexiones sobre el espacio, y W. Köhler, en sus estudios perceptivos, hicieron observar que el continuo perceptivo incluye situaciones en las que $A = B$ y $B = C$, pero $A \neq C$. Y de un modo más general todavía puede decirse que toda relación percibida es «deformante», en el sentido de que modifica los términos mismos de la relación (por contraste o por una igualación ilusoria): en efecto, si designamos con $B(A)$ la percepción de una magnitud B comparada con la magnitud perceptiva A, y con B la percepción de B sin hacer comparación alguna, y si (objetivamente) $A < B < C$,

$$B(A) > B \text{ y } B(C) < B, \text{ de donde } B(A) > B(C).$$

Análogamente, si $B = A + A'$, fórmula en la que $A + A'$ designa la reunión de dos segmentos desiguales, A y A', en una sola recta, B (pero con un pequeño trazo perpendicular a la extremidad libre de cada segmento, así como entre A y A'), y si con '—' se designa su disociación, perceptivamente se tiene que

$$(A + A') - A' \neq A.$$

[14] J. PIAGET, *Les méchanismes perceptifs*, París, P. U. F., 1961.

Estas relaciones deformantes y estas composiciones no aditivas corresponden a un espacio no homogéneo y anisótropo tal que cualquier elemento en que se centre la mirada se dilatará, en tanto que los elementos periféricos se contraerán (dilataciones y contracciones relativas). Las mismas deformaciones se observan incluso en el caso de comparar elementos iguales entre sí, pero entonces unas compensaciones aproximadas neutralizan en parte las deformaciones.

Por el contrario, un conjunto de actividades perceptivas consistente en exploraciones, en poner en relación a distancias variables en el espacio y en el tiempo (transportes, transposiciones, anticipaciones), en referir entre sí (direcciones u orientaciones), en esquematizaciones, etc., logran hacer fracasar parcialmente tales deformaciones y estructurar las figuras del espacio según ciertas formas relativamente estables: tales son las «constancias» perceptivas del tamaño y la forma, los esquemas perceptivos de las «buenas formas» (euclídeas), las coordenadas perceptivas, etc. Unicamente es preciso recordar que estas actividades perceptivas están orientadas, dirigidas y enriquecidas constantemente, por su parte, por aportaciones provinentes de instancias superiores a la percepción (el esquematismo sensorio-motor, las operaciones concretas de la inteligencia, etc.).

De estos dos tipos de consideraciones resulta que si quiere uno hablar de «intuiciones» perceptivas del espacio, o bien hay que referirse a los efectos primarios, que están todos manchados por errores sistemáticos más o menos engañosos, o hay que hacerlo a actividades perceptivas con resultados más cercanos al espacio racional; pero en este último caso se llama «perceptivo» a un espacio que, aun siendo aún muy elemental y estando poquísimo estructurado, ya no es, hablando genéticamente, puramente perceptivo.

3) Luego viene el espacio de la representación por imágenes, que se constituye desde que empieza la función simbólica (de los dos a los tres años) y, en particular, desde que empiezan a aparecer las imágenes mentales (pero éstas no prolongan simplemente la percepción, sino que consisten en imitaciones interiorizadas). Este espacio de la representación por imáge-

nes, todavía muy tosco entre los dos y los siete a ocho años, se desarrolla luego mucho más, primeramente de forma bastante general, y luego de manera desigual según los individuos (dependiendo de sus aptitudes especializadas); y de él procede lo que ordinariamente se llama «intuición geométrica», es decir, la capacidad de imaginar visualmente las figuras y sus transformaciones.

Pero si quiere construirse la teoría de esta forma de intuición, es esencial comprender que ésta no constituye la fuente de nuestro conocimiento «natural» del espacio; pues si no se hace así sería demasiado fácil —y, por consiguiente, ocasión para diversos malentendidos— oponer a esta categoría particular de la intuición por imágenes el espacio formalizado de los sistemas axiomáticos, y concluir que éstos se mueven a contracorriente del espacio natural. A este respecto es menester que advirtamos lo que sigue:

a) En primer lugar, la imagen mental no es nunca otra cosa que un símbolo, y no un conocimiento en sí misma [15]: todos sabemos, por ejemplo, que la imagen de un punto es inadecuada, ya que engloba una superficie, y que la de una línea también lo es, dado que conlleva cierto grueso; pero desde el punto de vista del geómetra no son sino símbolos que designan o representan los conceptos correspondientes, sin constituirlos. Ahora bien, lo mismo sucede a todos los niveles, incluso cuando el sujeto se engaña acerca de su simbolismo: en cuanto imitación interiorizada, la imagen no es más que el símbolo de una acción, que o bien consiste en constituir una figura (siguiendo los contornos del objeto, etc.) o en transformarla. Lo importante en la formación del espacio es, por tanto, el sistema de acciones u operaciones, respecto del cual la imagen no representa sino un simbolismo derivado.

b) Es preciso, sobre todo, repetir con respecto a la intuición por imágenes lo que ya hemos dicho de las actividades

---

[15] Recordemos que una imagen mental no es, en modo alguno, un concepto, ni, por lo demás, tampoco es una percepción, sino un esbozo de imitación del objeto o el acontecimiento percibidos anteriormente. Por ejemplo, la imagen visual corresponde poco más o menos a lo que pueda dibujarse de uno u otro cuando ya no se los perciba.

perceptivas: que se enriquece poco a poco con aportaciones del exterior, y que, por consiguiente, desde este segundo punto de vista tampoco constituye una fuente autónoma de conocimientos, ya que se limita a simbolizar lo que recibe desde fuera. Es sumamente instructivo, por ejemplo, comprobar que las representaciones por imágenes de carácter espacial son más pobres y más estáticas antes de llegar al nivel de las operaciones concretas que después. Así, a los niños de cinco a seis años les es todavía bastante difícil imaginar las posiciones intermedias (entre la vertical y la horizontal) de una varilla recta, a la que, sin embargo, saben perfectamente hacer girar 90°; lo mismo sucede con las posiciones intermedias entre un arco (de alambre flexible) y una recta, por más que sepan estirar aquél para convertirlo en ésta; y ni siquiera consiguen imaginar correctamente lo que dará un cuadrado de cinco cm. de lado (recortado en cartón) que esté colocado sobre otro de las mismas dimensiones cuando se lo desplace dos o tres cm.; en resumen, el sujeto imagina fácilmente lo que acabe de percibir, pero no imagina transformación alguna. A partir del nivel (que se alcanza de los siete a los ocho años) en que, en cambio, se vuelve capaz de efectuar operaciones elementales concebidas como reversibles (particiones, desplazamientos, mediciones, etc.), juntamente con los invariantes a los que conduce su agrupamiento (conservación de las distancias, etc.), se hace posible imaginar las transformaciones, pero en calidad de imitación interior de estas operaciones y de sus resultados, no de condición previa de tales operaciones.

No por ello deja de suceder que, una vez dirigida por las operaciones, la representación por imágenes es capaz de alcanzar en los dominios del espacio una movilidad y un grado de finura muy superiores a los correspondientes a otros dominios, y tal es la razón por la que desde hace largo tiempo se viene considerando que la «intuición geométrica» conlleva un valor cognoscitivo que no poseerían las demás variedades de representación por imágenes. No pretendemos restituirle semejante capacidad tras acabar de admitir que le viene de las operaciones mismas, no de su carácter de imaginatoria, y que éste no pasa de simplemente simbólico del conocimiento espacial y no es constitutivo de él. Pero una vez admitido esto, subsiste la

cuestión de comprender por qué las imágenes mentales espaciales, aun siendo parcialmente inadecuadas (cf. el punto, la línea, la función continua sin derivadas de Weierstrass, etc.), adquieren, sin embargo, un grado de adecuación muy superior al que está vinculado, en general, a la imagen mental.

La razón de ello es, sin duda alguna, doble. En primer lugar, si a la imagen como tal se le llama «simbolizante» y a la realidad por ella representada, «simbolizada», comprobamos ante todo que en el caso de la imagen espacial lo simbolizante es tan espacial como lo simbolizado: la imagen de un cuadrado tiene una forma parecida a la de éste, con cuatro lados iguales, como él, etc. Con la imagen temporal comparada a un acontecimiento temporal sucede en parte lo mismo (la imagen sonora de una melodía requiere tiempo para desplegarse, etc.), pero ya no ocurre igualmente con entes no perceptibles, como son una clase o un número: indudablemente, puedo imaginar la inclusión de una subclase en una clase mediante puntos inscritos en dos círculos de Euler, y el número 5 mediante cinco palotes alineados (imaginados en lugar de dibujados), pero todo ello no son sino figuras en el espacio, y no clases ni números, pese a las posibles maneras de hacer corresponder unas cosas con otras. Así pues, son imágenes de objetos clasificados o enumerados, no de clases ni de números, mientras que la imagen de un cuadrado, sin ser un cuadrado perfecto, es también una figura del espacio, cuyas líneas puedo imaginar cada vez más delgadas y cuyos lados, cada vez más cercanos a la igualdad (lo cual la hará tender hacia la forma cuadrada, en tanto que la imagen de cinco palotes no tiende hacia ningún número). En segundo lugar —y esto es todavía más importante—, si, contentándose con el sentido usual de estas palabras, se distinguen las tranformaciones entre dos estados de los estados entre los que tengan lugar las transformaciones, se comprueba que las transformaciones espaciales son las únicas que pueden imaginarse en el mismo plano (relativamente adecuado) de la representación imaginatoria de los estados espaciales, mientras que en todos los demás dominios la transformación no posee semejante propiedad: por ejemplo, es fácil transformar una imagen acústico-musical (así, una melodía musical) trasponiéndola a otro tono, y cabe imaginarse perfectamente la misma me-

lodía oída mentalmente en el nuevo tono, pero no es posible imaginar la transformación bajo la forma de una imagen acústica (por el contrario, se la simbolizará con una imagen espacial que desplace cada nota una altura determinada, hasta llegar a otra, etc.); análogamente, se pueden oír unas cuantas notas emitidas en orden inverso, pero lo que se escucha mentalmente es el resultado de la inversión, no ésta como transformación; y si, por otra parte, se intenta imaginar por representación con imágenes la transformación de un número o de una clase, por ejemplo, la división de 6 por 2, se consigue «ver» sin dificultad el paso de una colección de seis palotes, digamos, a dos colecciones de tres, pero tales desplazamientos no son otra cosa que símbolos espaciales de la división, y se encuentran tan lejanos de la transformación en cuanto operación de división como lo están los seis palotes del número 6: la imagen de la transformación no es ahora homogénea a la de los estados (una colección de seis y dos colecciones de tres) más que porque ambas son igualmente espaciales, e inadecuadas con respecto a lo simbolizado. Por el contrario, en el terreno de la representación por imágenes propiamente geométrica, las imágenes de los «estados» son figuras del espacio, y las de las «transformaciones» espaciales llamadas intuitivas son también figuras del espacio, de modo que la imagen de la transformación es homogénea a la de los estados: por ejemplo, el estiramiento de una figura *A* pasando a ser la *B* con conservación de la homeomorfia intuitiva entre *A* y *B* (invariancia del orden, de las relaciones referentes a la frontera, de los puntos dobles, de los entornos y las separaciones, etc.) es asimismo una figura del espacio; las secciones y proyecciones (con sus líneas de fuga, etc.), las transformaciones afines (en las que se conservan las paralelas), los cambios de dimensión manteniéndose la semejanza, los desplazamientos conservando las longitudes, etcétera, etc., son otras tantas figuras del espacio que se pueden imaginar visualmente tan bien como los estados mismos.

Esta doble propiedad de adecuación relativa progresiva (imaginando una línea cada vez más fina, que tienda a carecer de grueso) y de homogeneidad entre las imágenes de las transformaciones y las de los estados es lo que confiere a la representación imaginatoria espacial su carácter privilegiado y

permite hablar de una «intuición geométrica». Pero si bien es evidente el papel heurístico que ésta posee, hemos de recordar que su función cognoscitiva está limitada por dos consideraciones fundamentales: 1) el conjunto de las imágenes espaciales no progresa más que dirigido e informado por el juego de las operaciones activas del sujeto, de forma que su aspecto figurativo está cada vez más subordinado al aspecto operativo del pensamiento, y no proporciona informaciones relativamente adecuadas más que en función de esta subordinación; y 2) incluso en sus formas más adecuadas, la intuición espacial no pasa jamás de ser simbólica, esto es, traduce mediante unos simbolizantes siempre imperfectos —por perfectibles que sean— un sistema de simbolizados que, aunque espaciales o geométricos, consisten en conceptos intelectuales, y en conceptos manejados mediante operaciones.

III. *Las intuiciones operatorias referentes a elementos discretos.*—Las intuiciones temporales y las espaciales son de carácter vivido (experiencia del desplazamiento, etc.) o imaginatorio (imágenes sonoras, etc.). Mas también existe, además de estas dos categorías, un conjunto de conocimientos naturales asimismo llamados «intuitivos» cuyos estadios iniciales pueden igualmente considerarse como correspondientes a experiencias vividas y cuyos estadios ulteriores se caracterizan, a su vez, por operaciones cada vez más «abstractas» de la acción material (por medio de una «abstracción reflectora»), pero cuya independencia de toda representación por imágenes aumenta progresivamente: son las intuiciones operatorias referentes a objetos discretos. Como ejemplos podemos citar la «intuición de $n + 1$», invocada por H. Poincaré para justificar el carácter pretendidamente primitivo de la iteración numérica, la intuición de la multi-unidad de Brouwer, que supone una operación de coligación, la intuición de lo transfinito en el sentido de Denjoy [16] (paso al límite en la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$) y, en general, todo aquello a lo que se llama intuitivo en el manejo ele-

[16] A. Denjoy, «L' inneité du transfini», en F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, págs. 188-96 [vers. cit. págs. 199-207] (en este artículo se toma el término «innato» en el sentido de inherente al pensamiento natural).

mental de las clases, las relaciones y los números referentes a elementos discontinuos.

Tales intuiciones operatorias desempeñan un papel considerable en el pensar «natural», pero es preciso insistir en el hecho de que el término de «intuición» lo tomamos aquí en un sentido en parte distinto —en este caso muy distinto —al de las intuiciones temporales y espaciales. Hemos visto ya, es cierto, que a partir de cierto nivel del desarrollo las intuiciones temporales y espaciales involucran una intervención creciente de operaciones propiamente dichas, por lo que, desde dicho nivel, también ellas constituyen intuiciones operatorias; sólo que, en tales estadios operatorios siguen estando acompañadas por representaciones de imágenes (aunque éstas mismas se encuentren dirigidas por las operaciones), y este aspecto figurativo es tan saliente que para la mayoría de los autores ha constituido el carácter esencial de semejantes intuiciones (de ahí que Kant las clasificase entre las formas *a priori* de la «sensibilidad», y no del entendimiento: cosa que, a nuestro juicio, está en contradicción con lo que hoy sabemos sobre su elaboración genética). Por el contrario, las intuiciones operatorias referentes a objetos discretos, o bien son independientes de toda representación por imágenes, o están acompañadas de representaciones de éstas, pero en calidad de símbolos individuales, sin generalidad ninguna.

Es evidente, por ejemplo, que si se pregunta a unos sujetos cómo se representan, por una parte, un segmento de recta o un cuadrado y, por otra, la sucesión de los números naturales o la clase de los perros, en el primer caso se obtendrán unas imágenes muy semejantes, y en el segundo, una apreciable variedad de símbolos distintos (los números estarán representados por palotes alineados, por columnas de unidades superpuestas o por una figura escalonada, mientras que la clase de los perros, por una colección amorfa, por un gran círculo, etcétera). Esta diferencia podría explicarse diciendo que, al lado del espacio operatorio construido por nuestras acciones, existe un espacio físico o de los objetos [17], y que las representacio-

[17] Desde este punto de vista hay una importante diferencia psicológica entre las intuiciones espaciales, que corresponden a la vez a las construcciones del sujeto y a la experiencia de los objetos (espacio fí-

nes imaginatorias de carácter espacial se ven obligadas a tenerlo en cuenta, en tanto que no existen números, clases, etcétera, propiamente físicos, ya que los entes lógico-aritméticos existen únicamente a partir del momento en que un sujeto despliegue su actividad clasificando, poniendo en relación o numerando. Pero no queremos entrar todavía en semejante cuestión, y nos limitaremos a decir que, dado que la imagen mental es espaciotemporal por naturaleza (en cuanto imitación interiorizada de modelos perceptibles), existe una estrecha correspondencia entre una imagen espacial, por simbólica que sea, y un ser o una transformación espaciales, mientras que la imagen espacial o espaciotemporal de un número o de una clase y este número o esta clase en cuanto productos conceptuales de operaciones independientes del tiempo y el espacio son heterogéneos; y de ahí el carácter general de las imágenes espaciales y el carácter individual de las numéricas.

En consecuencia, las intuiciones operatorias referentes a elementos discretos van adquiriendo autónomamente predominio sobre la representación por imágenes, aun cuando la diferenciación entre la forma lógico-matemática de las operaciones que entren en juego y el contenido perceptible o imaginatorio de los objetos a que se apliquen tales operaciones sea únicamente progresiva, y ni siquiera muy segura hasta bastante tardíamente. Un ejemplo de intuición operatoria nos hará comprender a la vez esta diferenciación y su carácter tardío: la intuición según la cual la extensión de una clase, B, es necesariamente mayor que la de una subclase suya, A, supuesto que aquélla sea finita y que A' ($=B - A$) no sea nula. En los niveles preoperatorios, el niño no admite esta relación, $B > A$, ni siquiera pudiendo comparar perceptiblemente A y B, porque si disocia la parte A del todo, B, éste queda roto a sus ojos, y lo único que puede hacer es comparar A con A'; en cambio, al nivel de las operaciones concretas llegará fácilmente a comprender que $B > A$, por ejemplo, en el caso en que $B = 10$ flo-

sico), y las temporales, que son indisociables de un contenido físico o fisiológico (velocidad o fuerza); tal es la razón por la que no existe una cronometría pura comparable a la geometría pura, ya que las operaciones que entran en la construcción del tiempo operatorio (partición, seriación y medida) no poseen ningún carácter específicamente temporal.

res (dibujadas en cartoncitos colocados sobre la mesa) y $A = 5$ prímulas: dirá, entre otras cosas, que «hay más flores (B) que prímulas (A), porque las prímulas (A) también son flores (B)»; por el contrario, si la pregunta no versa sobre prímulas y flores, sino que se le presentan al niño cinco golondrinas y otros cinco pájaros, sólo llegará a decir que hay más pájaros que golondrinas —aunque admita sin dudas que las golondrinas son pájaros— de uno a dos años después (por término medio). La razón de que ocurra esto es que las colecciones de flores son más intuitivas, desde el punto de vista del espacio y, sobre todo, de la acción, que las de golondrinas o de pájaros, ya que aquéllas se reúnen en ramilletes, y no éstos. Pero, tarde o temprano, las intuiciones operatorias se desprenden de su simbolismo de imágenes y, al nivel de las operaciones hipotético-deductivas, se hacen independientes de su contenido: proceden de la acción, de las que se extraen por abstracción reflectora, pero llegan así a adquirir una completa autonomía con respecto a los objetos sobre los que se ejerzan tales acciones (éstas ya interiorizadas en operaciones); lo cual es fácilmente explicable, ya que a ningún nivel se extraen de los objetos, sino exclusivamente de las acciones efectuadas con ellos, cosa que no es lo mismo, en modo alguno.

IV. *Las intuiciones «puras»*.—Esta última observación permite comprender —anticipándonos a lo que desarrollaremos en el capítulo 10 a propósito de la génesis de las matemáticas puras— cómo se constituyen las múltiples variedades de intuición que ya no guardan relación alguna con acciones materialmente ejecutadas, sino que descansan únicamente en combinaciones operatorias efectuadas con el pensamiento.

Por ejemplo, H. Freudenthal ha escrito lo siguiente acerca de los espacios no euclídeos: «Los kantianos trataron de disminuir la importancia de este descubrimiento: los espacios no euclídeos serían inteligibles (espacios que había admitido Kant), mientras que el espacio intuitivo seguiría siendo euclídeo. Esta observación suscita la pregunta de qué quiere decir «intuitivo». Los matemáticos *han aprendido a operar intuitivamente* (el subrayado es nuestro) con objetos que no se parecen ya al espacio euclídeo; y en ocasiones el carácter intuitivo

de tales objetos es mucho más pronunciado que el de este espacio. ¿Quién puede zanjar la cuestión acerca de lo que es intuitivo? ¿Acaso un salvaje o un nene que no hayan estado influidos por nuestra geométrica civilización..., etc.?»[18]. Este pasaje plantea en forma muy notable el problema en términos genéticos: en primer lugar, porque afirma la posibilidad de desarrollar intuiciones nuevas por aprendizaje operatorio, y además, ya que pone en duda la existencia de una discontinuidad clara entre las intuiciones del niño y aquellas nuevas intuiciones. Por lo demás, en la continuación del mismo artículo, Freudenthal hace ver que Riemann no se inspiró en Kant en su célebre discurso inaugural de 1854, sino en Herbart, «el primero que se dio cuenta del espacio (al que ahora llamaríamos) topológico que psicológicamente precede al euclídeo»[19].

En un sentido análogo, G. Bouligand habla de una *intuición prolongada* para describir la forma en que se construye el paso de tres dimensiones a cuatro o a *n*, por analogía con el paso de dos a tres y por generalización de la integral doble en integral triple.

Pero la intuición no sólo es capaz en los dominios espaciales de convertirse en «transintuitiva» (según la expresión de M. Winter), ya que psicológicamente no procede de la percepción, como se cree demasiado frecuentemente, sino de la acción y de su interiorización en operaciones; lo cual permite una liberación progresiva con respecto a los modelos perceptibles. Es posible interpretar toda la construcción cantoriana de los conjuntos transfinitos, por más que él mismo la atribuyese a una intuición platonista, como una grandiosa generalización de fundamentales intuiciones operatorias de correspondencia y de orden: es cosa muy notable, en efecto, que este platónico autor haya sido el primero que, de hecho, haya incorporado al sistema de las nociones matemáticas la esencial operación de origen precientífico que es la correspondencia biunívoca y recíproca, cuya presencia hacía ya notar L. Brunschvicg en el trueque de una cosa por otra en las sociedades primitivas, y cuya muy general espontaneidad en el niño pequeño hemos comprobado

[18] H. FREUDENTHAL, «Le développment de la notion d'espace depuis Kant», *Sciences*, vol. I, núm. 3, págs. 3-13.
[19] *Ibid.*, pág. 9.

nosotros. Mas como se trata, de nuevo, de un esquema de acción u operatorio, y no de esquema alguno perceptivo, nada impide generalizar la operación ni hacerle que confiera así un sentido intuitivo a conceptos tan abstractos como la potencia de lo numerable, etc.

V. *Conclusiones.*—Estas pocas observaciones nos bastan (pues el punto *IV*, que exigiría un desarrollo más largo, conduce directamente al problema de que trataremos en el capítulo siguiente) para volver a los tres problemas enunciados al comienzo de este parágrafo.

1) No hay rasgo alguno positivo común a todas las variedades de conocimientos a los que los matemáticos —ya general, ya ocasionalmente— califican de «intuitivos». Pues en sentido amplio, el término de intuición cubre sin más todo lo que no esté formalizado, y por ello es imposible construir una teoría psicológica coherente del conocimiento intuitivo; en particular, es imposible responder a las preguntas 2) y 3) si no se empieza por clasificar las distintas variedades de «intuición», no atendiendo a su contenido (tiempo, espacio, número, etcétera), sino a su estructura. A este respecto pueden proponerse las siguientes dicotomías (citando como ejemplos, sobre todo, los que habíamos mencionado de I a IV):

Primeramente se encuentran las intuiciones empíricas relativas a propiedades físicas de los objetos o a propiedades psicológicas proporcionadas por la experiencia introspectiva vivida (ejemplos: la intuición del peso y la de la duración vivida con independencia de toda operación temporal) y las intuiciones vinculadas a acciones u operaciones, ya se refieran éstas a objetos (comprendidos los estados de conciencia vividos) o se desliguen de ellos más o menos completamente (ejemplos: las intuiciones del orden, el encajamiento sucesivo, la correspondencia término a término, etc.).

Estas intuiciones operatorias, que son las únicas que ofrecen interés desde el punto de vista matemático, están sujetas a una segunda dicotomía: la que opone las acompañadas de una representación por imágenes de naturaleza homogénea a la de las operaciones en juego (intuiciones geométricas) a las

intuiciones que no posean semejante propiedad (operaciones que versen sobre objetos discretos).

Ahora bien, como, cuando se habla de la intuición geométrica, se suele pensar más en su carácter imaginatorio que en su aspecto operatorio, vamos a introducir una nueva distinción dentro de las intuiciones operatorias: la que separa la intuición por imágenes (o simbolizante) de la intuición operatoria *s. str.* (en sentido estricto, que, por lo tanto, no se refiere a lo simbolizado). Esta última dicotomía, pues, no prolonga la anterior, sino que afecta a los mismos elementos, pero desde otro punto de vista: en el caso de las intuiciones espaciales, la intuición simbolizante es homogénea con la operatoria *s. str.*, mientras que en el de las intuiciones referentes a objetos discretos, la intuición simbolizante es de naturaleza casi individual (descontando ciertos usos generales, como el de los círculos de Euler, fundados en el isomorfismo entre los encajamientos sucesivos de clases y los cubrimientos topológicos).

2) Dado que las distinciones que acabamos de hacer son de índole sincrónica, quedan por recordar algunas distinciones diacrónicas (genéticas), pues cada una de las categorías que hemos distinguido presenta sus propias leyes de evolución.

a) Las intuiciones empíricas evolucionan en función de los progresos de la experimentación.

b) Las intuiciones operatorias *s. str.* competen a los mecanismos mismos de la inteligencia, y pasan por tres grandes estadios de desarrollo: intuiciones vinculadas a la acción material sobre los objetos, luego a la acción interiorizada en operaciones (pero todavía aplicable a los objetos), y por fin a operaciones independientes de toda posible acción (cf. el apartado IV).

c) Las intuiciones simbolizantes evolucionan de manera subordinada a las operatorias *s. str.*, que son las únicas que confieren movilidad y adecuación relativa a las imágenes, en particular a las espaciales.

3) El papel propiamente cognoscitivo de la intuición, aun cuando es efectivo a todos los niveles y se mantiene fundamen-

tal desde el punto de vista de la invención, disminuye (en sentido relativo) a lo largo del desarrollo: las intuiciones empíricas ceden el paso o se someten a las técnicas de experimentación estricta; las simbolizantes se subordinan cada vez más a las intuiciones operatorias *s. str.*; en cuanto a éstas, si bien tienen un desarrollo ilimitado, esto les sucede gracias al mecanismo de la «abstracción reflectora». Ahora bien, como vamos a ver, lo propio de ésta es afinar incesantemente las técnicas deductivas de acuerdo con un doble proceso, simultáneamente progresivo y retroactivo; de donde procede una tendencia interna a la formalización que, pese a que jamás pueda cortar todo contacto con sus raíces intuitivas, limita relativamente cada vez más el dominio propio de la intuición (en el sentido de pensamiento operatorio no formalizado).

Una de las razones por las que cierto número de lógicos y de matemáticos se desinteresan de la psicología, o incluso desconfían de ella, es que, de acuerdo con la idea que se hacen al respecto, el análisis genético no podría versar más que sobre el pensamiento «intuitivo», el único considerado «natural»; entonces, la formalización, por no ser patrimonio sino de una pequeña *élite* (por oposición al conjunto de los humanos, todos capaces de «intuición»), parece «artificial», si no algo que avanzaría «en dirección contraria a la naturaleza humana» (Pasch) —de manera análoga a como, antes de la sociología científica, se consideraba con Rousseau que las instituciones sociales se encontraban fuera de la naturaleza (se las habría construido libremente, por contrato), y que sólo el individuo era «natural»—. Mas, por una parte, para la psicología del desarrollo del pensar humano, el pensamiento de una pequeña *élite* es por lo menos tan interesante, si no lo es más, que el de la masa; y, por otra, puesto que el objeto de los estudios genéticos no es la conciencia introspectiva, sino el mecanismo de las construcciones sucesivas que conducen desde el nacimiento al estado adulto, antes de estar en condiciones de decidir acerca de la cuestión es preciso examinar muy de cerca si el paso del pensamiento intuitivo a la axiomatización no se encuentra preparado por nada en el desarrollo anterior; y, sobre todo, si tal paso franquea una distancia tan grande que no sea posible compararlo a las distancias —que, sin embargo, son considerables— entre la actividad sensorio-motriz del lac-

tante y el pensamiento hipotético-deductivo del adolescente normal (en nuestras sociedades, pero supuesto que posea un simple certificado de estudios primarios).

§ 52. **Las raíces genéticas de la matemática pura.**—La matemática pura es aquella cuyos axiomas son aceptables y cuyos teoremas se conservan válidos con independencia de todo objeto empírico o, incluso, de todo contenido intuitivo. Así sucede que una curva de Jordan, o imagen topológica de la circunferencia, por mucho que no pueda ser dibujada, no deja de presentar, desde el punto de vista de la matemática pura, el mismo grado de realidad que las figuras de la geometría euclídea elemental. E igualmente, los espacios de *n* dimensiones, las geometrías no euclídeas, los «espacios abstractos» de Fréchet, las diversas categorías de infinitos, las álgebras generalizadas, etc., no se distinguen en nada, miradas bajo el ángulo de la validez, de las estructuras más sencillas y más intuitivas de las matemáticas tradicionales.

I. *Planteamiento del problema.*—La primera cuestión que se plantea en tales circunstancias es la de saber si, al liberarse así de todas las limitaciones que hubieran podido creerse impuestas por los objetos físicos o por las intuiciones espaciales u operatorias de formas elementales, no han cambiado de naturaleza las matemáticas, o bien si la modificación no ha afectado más que a las interpretaciones filosóficas dadas por los mismos matemáticos (bajo diversas influencias, algunas de índole extramatemática) a su propia disciplina. Ahora bien, la cuestión no es nada sencilla, pues existen en la historia de las ciencias numerosos ejemplos de situaciones en las que el científico se entrega, de hecho, a actividades contrarias a las que deberían estar implicadas por las interpretaciones generales por él aceptadas de su ciencia, de suerte que E. Meyerson ha podido ofrecer perfectos ejemplos de una contradicción en ocasiones existente entre los prólogos de espíritu positivista y las obras que siguen, en las que el autor se dedica a investigaciones centradas sobre ese «modo de producción de los fenómenos» que el positivismo excluyera radicalmente de los dominios científicos. También en las matemáticas puede uno pre-

guntarse si entre el período en que reinaba inconcusa la metodología de Aristóteles, con sus requisitos de evidencia, y la llegada de la matemática pura, liberada de tales limitaciones de origen extrínseco, existe un corte tajante o, por el contrario, una transición continua, con compromisos variados entre una actividad matematizante de tendencias «puras» y una filosofía de las matemáticas ya superada de hecho.

Mas, por otra parte, importa mucho advertir que, en la medida en que pueda influir una concepción teorética o filosófica de las matemáticas en el cuerpo mismo de la ciencia, ello ocurre, en general, en un sentido limitativo: cosa que es obvia, dado que tales reflexiones proceden de una reflexión retroactiva sobre la tarea efectiva anterior (salvo en los raros casos de anticipaciones divinatorias, aunque nacidas de la toma de conciencia de ciertas tendencias ya actuantes en el estadio de partida). Tenemos un buen ejemplo de las limitaciones impuestas a las matemáticas por una filosofía, o por una concepción metodológica, pero situada en un plano distinto al de la construcción efectiva, en la elección efectuada por los geómetras griegos, que entre todas las figuras posibles no se quedaron sino con unas pocas, que eran las únicas que, a su juicio, podían pertenecer legítimamente al conjunto de los conceptos geométricos en sentido estricto: se suponía que estas figuras habían de obedecer a la regla limitativa de ser construibles por medio de la regla y el compás, por lo cual las curvas llamadas «mecánicas» (la concoide, la cicloide, etc.) no pertenecerían a la geometría, por lo menos dentro de los confines mantenidos por los Elementos de Euclides. Ahora bien, esta conclusión es tanto más curiosa cuanto que los geómetras griegos conocían perfectamente algunas de tales curvas mecánicas (la cuadratriz de Hipías, la concoide de Nicomedes y la cisoide de Díocles); de modo que el ostracismo a que estaban condenadas no era resultado de ninguna laguna existente en el desarrollo interno de la intuición geométrica, sino, indudablemente, de consideraciones extrínsecas debidas a una filosofía restrictiva, en forma comparable a la que inspiró a Aristóteles su distinción entre movimientos «naturales» y movimientos «violentos» (ὕβρις) o debidos al azar (τυχῇ), de todos los cua-

les sólo los primeros concernían a la física (si bien a una física muy corta, en el sentido etimológico del término, ya que terminaba donde la indicaba el marco de cierta filosofía)[1].

De estas observaciones se sigue que, por más que el advenimiento de la matemática pura a partir de las formas anteriores de esta ciencia haya podido suscitar conflictos y crisis en el plano de la filosofía de las matemáticas (el ejemplo más conocido es el de la crisis provocada por las geometrías no euclídeas entre los partidarios de la «forma *a priori* de la sensibilidad», que se suponía constituye la intuición del espacio, de acuerdo con Kant), ello no implica, en absoluto, que tal advenimiento haya revelado que se había dado media vuelta en el plano de las matemáticas mismas: por el contrario, nada impide admitir que la matemática pura se haya desarrollado siguiendo la misma línea que la evolución anterior (aunque, naturalmente, sin estar contenida de antemano en las de los niveles precedentes). Por ejemplo, los griegos, al substituir las comprobaciones empíricas de los egipcios (que conocían un caso particular del teorema de Pitágoras, aquel en el que los lados del triángulo rectángulo son entre sí como 3, 4 y 5, pero que no buscaban, por ello, ninguna demostración general) por la demostración racional, daban ya un paso esencial en la dirección de la matemática pura. Euclides, al distinguir, con una intuición genial, su quinto *postulatum* de los axiomas cuya evidencia reconocía, y otorgarle así un rango de validez algo inferior, dejaba abierta la puerta, sin saberlo, para otras geometrías que se basasen en distintos postulados. Y cuando Descartes descubrió la geometría analítica, introdujo relaciones nuevas entre la geometría y el álgebra, y, sin saberlo, inauguró una serie ininterrumpida de asimilaciones recíprocas entre unas ramas de las matemáticas hasta entonces heterogéneas, asimilaciones de las que cabe pensar que han constituido la razón principal de la toma de conciencia de la matemática pura.

---

[1] Como ha hecho notar Henri Lebesgue, podrían hacerse observaciones análogas a propósito de Descartes, que acepta la cisoide, pero excluye de su *Geometría* la espiral logarítmica y la cuadratriz. Véase a este respecto el hermoso libro de Jules VUILLEMIN, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, París, P. U. F., 1960, en especial los capítulos 1 y 3.

En conjunto, los dos rasgos principales de ésta son: *a*) su independencia con respecto a los objetos empíricos y a las intuiciones de los niveles elementales (de imágenes u operatorios concretos), y *b*) la creciente homogeneidad que introduce o reconoce entre las distintas ramas de las matemáticas, rompiendo los tabiques tradicionales entre la geometría y el análisis, entre la topología y el álgebra, etc. Ahora bien, ninguna de estas dos tendencias aparece como algo radicalmente nuevo durante su afirmación y despliegue a partir de mediados del siglo XIX: una vez colocadas en la perspectiva del desarrollo histórico total, comprendiendo en él las fases empíricas y tecnológicas que caracterizan a las matemáticas anteriores a las de los griegos (y teniendo en cuenta nuestra ignorancia acerca de los antecedentes del «milagro griego», esto es, de las matemáticas cretenses y minoicas, verosímilmente comparables a las de Egipto y del Medio Oriente), su advenimiento más bien se nos ofrece como resultado de un adquirir conciencia más a fondo de las tendencias permanentes de las matemáticas. Basta solamente recordar que las tendencias permanentes de una ciencia no se definen estáticamente, por los conceptos comunes a todos los niveles de su desarrollo, sino que corresponden a leyes de evolución, o sea, a una dirección o vección cuyas etapas progresivas se pueden seguir retrospectivamente, pero, como es natural, sin que quepa extraer de ella extrapolaciones a modo de letras giradas sobre el porvenir.

Tal es la hipótesis de que partimos; pero no deja de suscitar un problema psicológico, cuya solución ha de servir de contraprueba que justifique o invalide la interpretación propuesta. En efecto, en la medida en que la matemática pura se conforme a las tendencias permanentes de las matemáticas (desde el doble punto de vista de los rasgos *a*) y *b*) que acabamos de mencionar), será preciso que ya en la formación psicológica de los conceptos matemáticos más elementales sea posible descubrir las razones por las que tales conceptos acaben por convertirse en «puros», o por servir de punto de partida a otros que se vuelvan «puros». Por el contrario, en caso de que el análisis psicológico condujese a asignar un origen empírico (en el sentido de físico) o intuitivo (en el de perceptivo) a los conceptos matemáticos elementales, sería preciso concluir que

la matemática pura se ha construido como reacción a la matemática natural y a contracorriente de las etapas iniciales; lo cual llevaría a invocar una «conversión» en el sentido de Husserl o una ruptura total con las actividades espontáneas del sujeto.

Por tanto, el problema que ahora atacamos es central con respecto al objeto de la presente obra: pues explicar psicológicamente lo que haya hecho posible que exista la matemática pura es, en definitiva, pronunciarse en pro o en contra de las vinculaciones entre los entes lógico-matemáticos y las actividades del sujeto. En efecto: en la medida en que —como ha sucedido con frecuencia— se considere que la matemática pura es inexplicable psicológicamente, queda uno comprometido a seguir las direcciones del platonismo o de las concepciones que se apoyan en realidades esencialmente colectivas (el lenguaje, ciertas convenciones, etc.), cosa que corta las relaciones con las actividades del sujeto o no tiene en cuenta, de éstas, sino su subordinación a la transmisión social; mas, por otra parte, en la medida en que, al tratar de no desdeñar la existencia del sujeto, se procure explicar la matemática pura por una marcha en sentido inverso a la del pensamiento natural, se llega a desdoblar las actividades del sujeto, pero no en el sentido de distinguir tipos de experiencia o formas de construcción intelectual (lo cual sigue siendo comprobable mediante observación y experimentación sistemáticas), sino en el de una disociación entre el sujeto accesible a la investigación psicológica y un sujeto trascendental, al que competerían unas funciones cognoscitivas especiales, irreductibles a la fiscalización psicológica. En la medida en que, por el contrario, se consiga mostrar que las tendencias que han llevado a constituir la matemática pura operaban ya desde los orígenes más humildes de la matematización (ya que, pese al prejuicio tan difundido e históricamente explicable —pero, en realidad, singularmente frágil, por carecer de toda necesidad interna—, el análisis genético objetivo no conduce necesariamente a interpretaciones empiristas ni psicologistas del conocimiento), podrá inferirse que los entes lógico-matemáticos están vinculados a las actividades del sujeto, sin que por ello hayan de provenir de una experiencia en el sentido corriente de este término.

II. *La experiencia lógico-matemática elemental.*—Así pues, el examen del problema debe comenzar por un análisis de la experiencia lógico-matemática a los niveles más elementales, con objeto de determinar si se reduce a una experiencia acerca de objetos en el sentido de la experiencia física externa, o acerca de estados de conciencia (es decir, sobre el sujeto considerado como objeto) en el sentido de la experiencia psicológica interna, o bien si se trata de otro tipo de experiencia, referente al resultado de acciones y de sus coordinaciones, o sea, consistente en leer el resultado de ciertas composiciones en sentido análogo a como se toma nota de lo obtenido en un cálculo (lo cual permitiría, pues, tarde o temprano, reemplazar la experiencia por una deducción operatoria).

Es preciso reconocer, ante todo, que al nivel inicial del desarrollo no se aceptan sino mediante comprobación experimental ciertas verdades lógico-matemáticas que posteriormente darán lugar a una evidencia deductiva inmediata; pero, como acabamos de ver, esto sólo no prueba nada en cuanto a la índole de las experiencias que entren en juego, y de lo que se trata es de determinarlas. Citemos primeramente uno o dos ejemplos. Podemos recordar, en primer término, el de la conmutatividad en general: el hecho de que $2+3=3+2$, o de que cinco elementos contados de izquierda a derecha den el mismo resultado que contados de derecha a izquierda, no se admite al principio sino tras haberlo comprobado; la suma, pues, no se concibe con evidencia como algo independiente del orden, mientras que a un nivel posterior este hecho se comprende como analíticamente necesario, desde el momento en que no se añade ni se quita ninguna unidad. Lo mismo sucede con una colección de k miembros que sea divisible por dos (con verificación término a término): el niño, a cierto nivel, no concluirá que la colección $k+1$ no es divisible por dos, mientras que a un nivel posterior estará seguro deductivamente de ello, debido al hecho de que una unidad en exceso impide la correspondencia biunívoca [2]. Mas si bien estos dos ejemplos son válidos desde el punto de vista de las diferencias entre el período

[2] P. GRÉCO, «Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant», *Études d'Épistémologie génétique*, vol. XI, estudio V.

preoperatorio (antes de los siete a ocho años) y el comienzo del período de las operaciones concretas (de estas edades en adelante), puede decirse que lo mismo ocurre con gran número de evidencias de dificultad un poco mayor, a cuyo respecto encontramos, incluso más tarde, una fase de comprobación experimental necesaria antes de la fase de comprensión deductiva inmediata: por ejemplo, estando ante una sucesión ordenada de colecciones dotadas de 1, 2, 3, ..., elementos (hasta llegar a los 20 ó 30), se señalan al niño dos colecciones, de m y n elementos, respectivamente, separadas por cierto intervalo (por ejemplo, $m=7$ y $n=12$; será el niño mismo quien haya construido la sucesión y, por consiguiente, estará seguro de que cada colección difiere de la precedente en +1 elemento); y luego se le pregunta, simplemente, si $(m+n)=(m+1)+$ $+(n-1)$; pues bien, también en este caso se advierte que antes de llegar al nivel en que esta igualdad aparece como deductivamente necesaria existe una fase —hasta los nueve años, por término medio— en la que no se la admite más que tras haberla comprobado [3].

Resumiendo, hasta momentos bastante tardíos se observa el hecho de que el sujeto, antes de poder deducir un resultado, se ve obligado a comprobarlo empíricamente para admitir su verdad. En los niveles preoperatorios ocurre así con todas las verdades lógico-matemáticas descubiertas por el sujeto, comprendidas incluso las más evidentes, como la transitividad de la igualdad; al nivel de las operaciones concretas (de los siete a los doce años), se reconoce por deducción inmediata que cierto número de aserciones son verdaderas, e incluso necesarias, pero por poco que la cuestión planteada exceda el poder de este tipo de deducción, el sujeto empieza asimismo por comprobar empíricamente antes de deducir, incluso cuando trata en seguida de deducir para comprender. Por lo demás, es bien sabido que tal conducta se vuelve a encontrar a niveles muy superiores, por lo menos en el caso del «experimento mental».

---

[3] P. GRÉCO, «Le progrès des inférences fondées sur l'itération numérique chez l'enfant et l'adolescent», trabajo que aparecerá en un próximo fascículo de los *Etudes d'Epist. génét.*

Pero si bien no hay razón alguna para poner en tela de juicio la existencia de un nivel inicial de matemática empírica, es menester, por el contrario, insistir vigorosamente en el hecho de que esta experiencia lógico-matemática difiere desde el comienzo de la experiencia física. Pues cuando se analiza la naturaleza de aquella experiencia no sólo se comprende por qué deja paso tan rápidamente a la deducción propiamente dicha (lo cual es mucho más tardío en el campo de la experiencia física), sino también cómo garantiza desde sus estadios iniciales la posibilidad de una matemática pura; y vamos a tratar de mostrar ahora mismo que así sucede.

1) El hecho esencial es que si la experiencia física se refiere a objetos, y en ella se adquieren conocimientos por abstracción a partir de éstos, la experiencia lógico-matemática se refiere a las acciones que el sujeto ejerce sobre los objetos, de suerte que la adquisición de conocimientos proviene en este caso de una abstracción a la que se debe considerar procedente de tales acciones, ya que las propiedades descubiertas en los objetos son precisamente las mismas introducidas previamente por las acciones.

Por ejemplo, cuando un niño descubre que un guijarro grande es más pesado que uno pequeño, es preciso hablar de una experiencia de tipo físico, pues, por más que haya tenido que actuar sobre los guijarros para sopesarlos, el sujeto descubre una propiedad que les pertenecía ya antes de ejecutar tal acción; y cuando abstrae la relación de peso por oposición a los colores, etc., se trata, pues, sin duda alguna, de una abstracción a partir del objeto. Por el contrario, cuando alinea cinco guijarros y descubre que el número 5 se conserva el mismo ya se cuente de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, la experiencia es de índole lógico-matemática, puesto que no versa sobre los guijarros en cuanto tales, sino sobre las relaciones existentes entre la acción de ordenar y la de reunir en una suma: el orden lineal no existía, en efecto, en los guijarros antes de que la acción los alinease en una hilera; y en cuanto a su suma, también depende de una acción, la de reunir, que, por una parte, deja de lado los demás guijarros y otros objetos que haya sobre la mesa y, por otra, construye

una totalidad por medio de esos guijarros sin omitir ni contar dos veces ninguno de ellos. Así pues, lo que el niño descubre no es una propiedad de los guijarros en cuanto tales (indudablemente, comprueba además que son indeformables, que no se ha desvanecido ninguno durante el proceso de numerarlos o el de alinearlos, etc., pero no eran éstas las cuestiones que se planteaba el sujeto): es el hecho de que el resultado de la acción de reunir es independiente del orden seguido en la de ordenar. Por consiguiente, la abstracción se efectúa a partir de las acciones, y no de los objetos, por más que el resultado de tales acciones se compruebe sobre éstos.

2) Pero esta experiencia lógico-matemática, que versa, pues, sobre las acciones del sujeto y no sobre los objetos, no constituye, por ello, en manera alguna, una «experiencia psicológica», en el sentido en que descubrimos por introspección ciertas regularidades referentes a nuestra conducta (por ejemplo, que si trabajamos demasiado tiempo seguido nos sentimos cansados, mientras que interrumpiendo la tarea durante pequeños intervalos el trabajo avanza mejor): existen dos diferencias fundamentales entre las experiencias lógico-matemática y psicológica. En el punto 3) nos ocuparemos de la segunda; en cuanto a la primera, consiste en que la experiencia psicológica versa sobre el sujeto en cuanto objeto interior (como la experiencia física versa sobre los objetos en cuanto objetos exteriores) y procede al respecto por introspección o adquiriendo conciencia de los caracteres subjetivos de la acción (o sea, en cuanto individuales), mientras que, por el contrario, la experiencia lógico-matemática no se refiere a la acción en cuanto proceso individual, sino a sus resultados en cuanto objetividades y, además, necesarias. Así pues, en este tipo de experiencia no interviene introspección alguna referente a los rasgos subjetivos (por individuales) de la acción, por ejemplo, al hecho de que la acción de ordenar sea fácil o difícil, se vea acompañada o no por imágenes mentales, etc.; lo único que importa de la acción es su resultado objetivo (en cuanto desligado del individuo y común a todos los sujetos que la efectúen), y esta objetivación es tan esencial que el sujeto comprueba sobre los objetos el resultado de las acciones ejercidas sobre ellos, es

decir, el resultado que trataba de averiguar[4]. En cuanto a la suposición de que éste sea necesario, el sujeto se limita a comprobar que no puede conseguir contraejemplos, pero el observador puede interpretar tal hecho como los comienzos de cierta necesariedad, dado que al nivel siguiente al sujeto no le será ya preciso efectuar experiencia alguna, sino que, sin más, deducirá el resultado como algo evidente.

3) La segunda diferencia fundamental entre la experiencia lógico-matemática y la psicológica es que esta última puede referirse a cualesquiera experiencias (por ejemplo, las de reír, estornudar o coger una flor), mientras que la primera versa únicamente sobre acciones que, una vez interiorizadas —en los niveles siguientes, en los que dicha experiencia se vuelve inútil y deja paso a la deducción—, se habrán de transformar en «operaciones». Como ya hemos visto (en el capítulo 8, § 45), una operación es una acción interiorizable, reversible y solidaria siempre de otras operaciones, con las que constituye una estructura caracterizada por leyes de totalidad (por ejemplo, las leyes de «grupo», de redes, de «agrupamientos», etc.); y el hecho de que la experiencia lógico-matemática no verse, por tanto, sino sobre acciones que luego se hayan de transformar en operaciones (las de ordenar, reunir, etc.), muestra, pues, que esta forma de experiencia no constituye otra cosa que una fase preparatoria, cuyo papel consiste precisamente en la construcción de las futuras operaciones. Una vez constituidas éstas en estructuras, la deducción se hará posible, y la experiencia, inútil; mas para que se elaboren tales estructuras operatorias es menester, en cambio, que las acciones se coordinen previamente y que el sujeto descubra inductivamente sus propiedades operativas, de suerte que pueda luego interiorizarlas y manejarlas deductivamente. Y como ninguno de estos caracteres corresponde a la experiencia psicológica en general, vemos de nuevo que la experiencia lógico-matemática se diferencia de ella todavía más que de la experiencia física.

---

[4] Y, precisamente por faltar la introspección (que no desempeña papel alguno en la experiencia lógico-matemática), el sujeto puede muy bien creer que de este modo descubre propiedades físicas del objeto, sin sospechar que su propia acción es la que se las ha conferido.

4) Cabe resumir estas diferencias entre las experiencias lógico-matemática y psicológica (cf. los puntos 2) y 3)), diciendo que esta última se refiere al despliegue causal o introspectivo de las acciones, mientras que la primera versa sobre los «esquemas» de éstas. Por definición, el esquema de una acción es el conjunto estructurado de sus rasgos generalizables, esto es, de los que permitan repetirla o aplicarla a nuevos contenidos. Ahora bien, un esquema de acción no es ni perceptible (lo que se percibe es una acción determinada, no su esquema) ni directamente introspeccionable, y sólo se adquiere conciencia de sus implicaciones repitiendo la acción y comparando sus resultados sucesivos. En el caso de las acciones destinadas a interiorizarse en operaciones, los esquemas correspondientes comprenden sus caracteres más generales, es decir, los de la coordinación como tal; pues acciones como las de reunir (o disociar), ordenar (en un sentido o en el inverso), poner en correspondencia, etc., que constituyen el punto de partida de las operaciones elementales con clases y con relaciones, no son simplemente capaces de versar sobre objetos exteriores, sino que, ante todo, son acciones cuyos esquemas expresan las coordinaciones generales de todas las acciones, pues toda acción (desde los simples reflejos hasta acciones aprendidas como la de coger una flor o la de encender la pipa) supone al menos una de las coordinaciones consistentes en ordenar movimientos sucesivos, reunir elementos, etc. Tal es la razón por la cual estos esquemas tienen un alcance completamente general, y no simplemente caracterizan una acción u otra de cierto individuo; pero también es la razón de que se mantengan inconscientes mientras una «abstracción reflectora» no los transforme en operaciones. Por ello es natural que, en los niveles preoperatorios del desarrollo, no sea posible sin más la deducción por medio de tales esquemas y de sus implicaciones, debido a no haber adquirido conciencia de ellos: entonces, y solamente entonces, la experiencia lógico-matemática sigue siendo psicológicamente necesaria para suplir la deducción. Pero, como vemos, esto no significa, en modo alguno, que las operaciones elementales con clases, con relaciones o con números se extraigan de los objetos físicos ni del sujeto psicológico

individual, dado que esta experiencia lógico-matemática las saca de las coordinaciones más generales de la acción, cuyas leyes son independientes de las acciones particulares del individuo.

5) Todavía nos queda por puntualizar el mecanismo por el cual se extraigan los resultados de semejante «experiencia». Cuando de experiencias se habla, se imagina uno con demasiada frecuencia que el sujeto registraría sus resultados merced a una simple lectura perceptiva; pero los datos de hecho necesitan una interpretación por parte del sujeto ya en los contactos llamados más «inmediatos». No es éste el lugar oportuno para mostrar que esta interpretación activa interviene incluso en los dominios de la experiencia introspectiva, en los que la interpretación, por lo demás, es causa de errores sistemáticos tanto como de informaciones adecuadas; y en el campo de la experiencia física, por elemental que sea, los resultados no se aprehenden sino por intermedio de un marco lógico-matemático: por ejemplo, para descubrir que si un cubo de madera tiene cierto peso, dos cubos iguales pesan el doble, incluso el niño necesita la numeración y la relación de igualdad y, por consiguiente, las operaciones de suma numérica y de substitución; y si se limita a comprobar que el cubo mayor pesa más, tiene necesidad de las relaciones de desigualdad y de una operación de poner en correspondencia. Resumiendo: a todos los niveles, la experiencia física se refiere a un marco lógico-matemático, por muy rudimentario que sea éste. En cuanto a la experiencia lógico-matemática, como ya hemos visto en 1), no se refiere a propiedades físicas de los objetos, sino a los resultados de las acciones, es decir, a las nuevas propiedades que introducen éstas en los objetos, por ejemplo, el hecho de estar ordenados o de tener una suma. Ahora bien, si ya la «lectura» de las propiedades físicas supone unos marcos lógico-matemáticos simplemente para que tal lectura sea posible, ¿ocurrirá también lo mismo cuando se trate de comprobar sobre el objeto el resultado de las acciones, por ejemplo, el orden, la suma y la independencia de ésta con respecto a aquél? Por paradójico que pueda esto parecer, se produce ahora una situación análoga, salvo en cuanto a que, en estos

últimos casos, el «marco» previo y el resultado comprobado no se encuentran en el mismo plano, debido a que lo que ahora hace el papel de marco no es otra cosa que el «esquema» mismo de la acción, esquema cuya experiencia lógico-matemática tiene por función la de suscitar la toma de conciencia. En efecto: es imposible comprobar la existencia de un orden en los objetos sin ordenar las acciones mismas que sirvan para tal comprobación; por ejemplo, se introduce cierto orden en los movimientos oculares que sigan un objeto tras otro, o en los movimientos del dedo con que se los designe sucesivamente, etc.; análogamente, es imposible determinar una suma sin utilizar un esquema de sumación en las acciones mismas de reunión o de enumeración que valgan para encontrar la suma de los objetos que se buscase, etc.

En lo que se refiere al procedimiento por medio del cual el sujeto adquiere un nuevo conocimiento a partir de los resultados de sus propias acciones o coordinaciones de ellas, la situación es la siguiente: *a*) la experiencia lógico-matemática consiste en comprobar sobre unos objetos cualesquiera los resultados de las acciones que se ejerzan sobre ellos; *b*) tales resultados están determinados por los esquemas de las acciones así ejercidas; *c*) mas para comprobar (o «leer») tales resultados, el sujeto se ve obligado a efectuar otras acciones (de lectura) que utilicen los mismos esquemas que aquellas cuyo efecto se quiera examinar; sin embargo, *d*) el conocimiento así adquirido es nuevo para el sujeto, de modo que, aunque una simple deducción podría —de derecho— haber reemplazado a la experiencia, ésta le enseña algo de lo que no tenía conciencia antes; es preciso concluir, pues, *e*) que la abstracción por medio de la cual el sujeto extraiga el nuevo conocimiento (nuevo para su conciencia) de los resultados de sus acciones conllevará cierta construcción, la cual producirá el efecto de traducir el esquema y sus implicaciones a preoperaciones u operaciones conscientes, cuyo manejo ulterior permitirá reemplazar las experiencias o los procesos empíricos, así convertidos en inútiles, por deducciones.

Esta abstracción constructiva no es otra cosa que la «abstracción reflectora», una de cuyas manifestaciones esenciales

acabamos de captar, y cuyo papel, cada vez más importante, comprobaremos en lo que sigue (ya lo habíamos entrevisto en el § 48, capítulo 8). Pues extraer un nuevo conocimiento de las propias acciones no consiste simplemente en proyectar la luz de la conciencia sobre una organización previa sin modificarla, salvo en cuanto al paso de lo inconsciente a la conciencia, sino en generalizar tal organización y representarla (en el sentido psicológico del término) bajo la forma de un modelo más amplio de operaciones que puedan concebirse simultáneamente: en efecto, un esquema de acción no es sino la forma de una sucesión de acciones que se desplieguen sucesivamente sin visión simultánea de conjunto, y el resultado a que conduce la abstracción reflectora, por el contrario, consiste en ascenderlo al rango de esquema operatorio; es decir, a una estructura tal que, una vez empleada una de sus operaciones, sea posible deductivamente, mediante una reflexión que trascienda la acción momentánea, componerla con otras.

Parece, pues, evidente, como conclusión de los puntos 1) a 5), que la existencia de una experiencia lógico-matemática inicial no justifica, en absoluto, una interpretación empirista de las matemáticas, y, por el contrario, contribuye a explicar desde el comienzo la posibilidad de la matemática pura. Esto es así porque, como tal experiencia, no versa sobre los objetos físicos, sino sobre las acciones ejercidas sobre ellos, es comprensible inmediatamente que en los niveles posteriores la actividad matematizante pueda prescindir de tales objetos, dado que la abstracción reflectora que saca las primeras nociones del sujeto tiene por resultado el de transformar estas últimas en operaciones, y que éstas, a su vez, podrán ejecutarse más tarde o más temprano simbólicamente, sin preocuparse ya de los objetos (que, por lo demás, eran «cualesquiera» desde el comienzo). Gonseth ha dicho que la lógica es (entre otras cosas) la física de los objetos cualesquiera; y nosotros aceptamos la fórmula si se la traspone en «coordinación de las acciones ejercidas sobre objetos cualesquiera». Mas la abstracción reflectora a partir de las acciones tampoco entraña una interpretación empirista (en el sentido de psicologista), ya que las acciones en cuestión no son acciones particulares de

sujetos individuales (o psicológicos), sino que son las coordinaciones más generales de todo sistema de acciones; coordinaciones que traducen, por ello, lo que hay de común en todos los sujetos y se refieren, por consiguiente, al sujeto universal o epistémico, y no al individual; de este modo, la actividad matematizante aparece como algo regulado desde el comienzo por leyes internas y que escapa a la arbitrariedad de las voluntades individuales. Y puesto que no todo está preformado desde el origen y sigue siendo necesaria una larga construcción para llegar hasta la matemática pura, el constructivismo no consiste en una serie de creaciones libres o de convenciones caprichosas: la construcción, que no empieza *ex nihilo,* sino a partir de un sistema de esquemas de acción cuyas raíces han de buscarse, sin duda alguna, en la organización nerviosa y biológica del sujeto, solamente llega a pasar al campo del pensamiento consciente al verse obligada a integrar los enlaces previos comprendidos en los esquemas; y en cada nuevo peldaño, la necesidad de integrar, superándolos, los resultados de las construcciones anteriores explica que las construcciones sucesivas obedezcan a unas leyes de dirección: no —repitámoslo una vez más— porque estuviese todo dado de antemano, sino porque esta necesidad de integrar lleva en sí misma una continuidad de la cual no se da uno cuenta más que retrospectivamente, pero que no por ello deja de imponerse. Así pues, la experiencia lógico-matemática no tiene nada de comienzo absoluto: es una etapa de transición entre la organización interna de las acciones y los comienzos de la construcción operatoria, etapa que está ya llena de enseñanzas; pero éstas no habrán de adquirir toda su significación más que cuando se sigan paso a paso las etapas siguientes, que se escalonan entre este aparente empirismo y la matemática pura.

III. *Las operaciones «concretas» y las hipotético-deductivas.*—Las «abstracciones reflectoras» efectuadas a partir de las acciones del sujeto dan como resultado la construcción de cierto número de sistemas operatorios elementales, que permiten substituir la experiencia por la deducción; sólo que este paso a la deducción está muy lejos de ser brusco, sino que se asiste a una serie de transiciones entre los niveles preope-

ratorios y aquellos en los que la deducción se hace capaz de versar sobre puras hipótesis. Tiene interés que recordemos semejantes pasos intermedios, dado que muestran de una manera bastante convincente el origen verdaderamente activo de las nociones lógico-matemáticas, en oposición a las fuentes puramente lingüísticas o verbales que podríamos estar inclinados a invocar al respecto; lo cual no es decir, naturalmente, que el lenguaje no desempeñe papel alguno en esta interiorización de las acciones en operaciones: sin duda de ninguna clase, incluso constituye una condición necesaria para semejante interiorización, pero no una condición suficiente, ya que sin acciones no habría operaciones que interiorizar.

El conjunto más claro de pasos intermedios del tipo a que hemos aludido consiste en lo que llamamos «operaciones concretas», que están caracterizadas por los dos conceptos siguientes. Desde el punto de vista estructural, no logran constituir más que sistemas limitados (e interesantes por esas mismas limitaciones) que corresponden a la estructura de los «agrupamientos» (véase el capítulo 8, § 45): tales son los agrupamientos de clases y de relaciones, así como los comienzos de la construcción del número (cf. más adelante, en el capítulo 11, § 56), a los cuales se añaden los primeros agrupamientos espaciales (el orden y los cubrimientos topológicos, la coordinación de los «puntos de vista» proyectivos, la composición de las longitudes y las superficies euclídeas), juntamente con los comienzos de la medida[5]. En todos estos campos, la llegada de los agrupamientos queda señalada por la construcción de unos conceptos deductivos fundamentales, que estaban ausentes en los niveles preparatorios: son los conceptos de conservación, que constituyen los invariantes de los agrupamientos mencionados (conservación de los conjuntos, las longitudes, etc.). Desde el punto de vista funcional, estas mismas operaciones presentan un carácter limitativo general muy instructivo: sólo funcionan en presencia de objetos, bien sea durante su manipulación o apoyándose en representaciones por imágenes, pero esto en la medida en que estas últimas prolonguen directamente la posible manipulación; y se convierten en inutilizables

[5] J. PIAGET y B. INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*

cuando se reemplazan los objetos por simples hipótesis enunciadas verbalmente.

Este doble carácter de estructuras limitadas y de funcionamiento sólo con ocasión de la manipulación de objetos indica claramente, pues, que en esta etapa intermedia las formas están en camino de disociarse de su contenido, pero sin haberse llevado a cabo la disociación: existe un comienzo de ésta, dado que se construyen unas estructuras cuyos aspectos formales podría desgajar un lógico y ofrecernos una formalización adecuada de ellos (véase, en el capítulo 8, § 45, la formalización de la estructura del «agrupamiento» dada por J. B. Grize). Sin embargo, desde el punto de vista del sujeto, tales formas no llegan a funcionar más que ligadas a su contenido, puesto que sigue siendo necesario manipular los objetos para que se desencadenen las primeras deducciones, ya estén fundadas en la transitividad de los encajamientos sucesivos entre clases o en la correspondiente a las relaciones simétricas (o asimétricas, pero ordenadas), etc. Cuando se la compara con la fase en que era necesaria la experiencia lógico-matemática, esta naciente disociación de la forma y el contenido marca una etapa importante en la dirección que conduce a liberar el pensamiento con respecto a los objetos, por más que nos encontremos todavía a un nivel de intuición operatoria muy tosco y primitivo (de los siete a los doce años, como media, en nuestras sociedades occidentales).

La etapa siguiente, por el contrario, señala un progreso decisivo en la liberación de las formas: a partir, por término medio, de los doce a quince años (en nuestras sociedades), el niño se vuelve capaz de razonar deductivamente sobre hipótesis sencillas enunciadas verbalmente; aparición del razonamiento hipotético-deductivo que se debe a nuevas «abstracciones reflectoras», si bien a partir de operaciones concretas y de manera análoga a como estas mismas se habían constituido por este mismo tipo de abstracción a partir de la experiencia lógico-matemática. Hemos visto más arriba (en el capítulo 8, § 46) las nuevas estructuras de reticulado y del grupo de cuatro transformaciones, *INRC*, que se construyen en el momento en que el raciocinio comienza a funcionar de modo hipotético-

deductivo, y, por consiguiente, no tenemos por qué volver en forma general sobre lo allí dicho; pero sí conviene, desde el punto de vista de los problemas que ahora nos ocupan, que comprendamos sobre aquel ejemplo, que en otro lugar hemos estudiado de cerca [6], cómo puede constituirse una estructura rica y fuerte a partir de otra más pobre y débil, ya que el mecanismo de tales generalizaciones será lo que dé cuenta de la formación de la matemática pura (y, por consiguiente, es esencial que indaguemos si tal mecanismo es explicable psicológicamente).

Ahora bien, el paso de las operaciones concretas a las hipotético-deductivas es, precisamente, un excelente ejemplo de abstracción reflectora, ya que hace ver cómo se construyen, en realidad, operaciones nuevas (u operaciones sobre las operaciones precedentes) cuando, por abstracción, se extrae de unas operaciones inferiores lo que contuviesen virtualmente: cosa que sucede por el solo hecho de que la abstracción a partir de acciones o de operaciones no consiste en una simple segregación, ni en una simple lectura de elementos disociados, sino que conlleva necesariamente una reconstrucción por medio de elementos proyectados o «reflejados» del plano inferior al superior. En efecto: por una parte, el reticulado del álgebra de Boole está virtualmente implicado en los agrupamientos de clasificación, puesto que basta generalizar éstos (por vicaría) a todas las clasificaciones posibles por medio de unos elementos dados para obtenerlo; pero la combinatoria que conduce a este resultado, y que el niño descubre de hecho en el nivel mismo en que construye las primeras operaciones interproposicionales (implicación, disyunción, etc.), constituye, por otra parte, una operación nueva, ya que, por más que no consista sino en una generalización de la clasificación, es preciso adquirir conciencia de esta posibilidad y dedicarse a cierta clasificación entre todas las posibles (de 2, 3, 4, etc., elementos); o sea, construir unas operaciones que versen sobre operaciones anteriores. De hecho, este carácter de consistir en operaciones sobre operaciones (o de operaciones en segunda potencia) es

[6] Véase B. Inhelder y J. Piaget, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, París (P. U. F.).

lo que representa la novedad psicológica fundamental de las operaciones hipotético-deductivas con respecto a las concretas. Rasgo que volvemos a encontrar en la utilización del grupo de las inversiones y reciprocidades (*INRC*) cuando el sujeto se pregunta, acerca de cierta implicación, $p \supset q$, si es verdadera o si lo que se verifica es su inversa, $p \, . \, \bar{q}$; o bien si la recíproca, $q \supset p$, es verdadera o si queda invalidada por su propia inversa ($\bar{p} \, . \, q$), que, por lo demás, es compatible con $p \supset q$ (con respecto a la cual constituye la correlativa, $C = NR$): la negación, *N*, la reciprocación, *R*, y la correlatividad o negación de la reciprocidad, *C*, constituyen así unas operaciones efectuadas sobre la operación $p \supset q$, que, a su vez, es una operación proposicional que versa sobre unas operaciones anteriores con clases, relaciones o números.

Ahora bien, esta abstracción reflectora no consiste solamente en construir nuevas operaciones sobre las anteriores; pues, por el solo hecho de que tales operaciones nuevas sean más abstractas, por pertenecer a un grado superior, permiten combinar en nuevas totalidades los elementos tomados de los sistemas inferiores, hasta entonces desvinculados entre sí, o los elementos comunes a estos sistemas, separados hasta aquel momento. Tal es la manera (como hemos señalado con insistencia en el capítulo 8, § 46) en que el grupo de cuatro transformaciones, *INRC*, reúne en un solo sistema las inversiones (que hasta el momento eran peculiares de los agrupamientos de clases) con las reciprocidades (que eran privativas de los agrupamientos de relaciones), y que eran incompatibles entre sí hasta el momento de constituirse este sistema de nivel superior.

§ 53. El problema psicológico de la matemática pura.— Parece posible generalizar el ejemplo que acaba de presentarnos el desarrollo individual en el caso del paso de las operaciones concretas a las hipotético-deductivas. Pues, expresado en forma esquemática, tal ejemplo se reduce a lo siguiente: *a*) para construir una estructura abstracta y general a partir de otra más concreta y particular, es preciso, ante todo, abstraer ciertas vinculaciones operatorias de la estructura ante-

rior, de suerte que se las pueda generalizar en la posterior; *b*) pero tanto semejante abstracción como la generalización suponen que las vinculaciones así abstraídas aparezcan por «reflexión» (en el sentido propio de la palabra) en un nuevo plano del pensamiento, de modo que constituyan una réplica generalizada de aquéllas; *c*) ahora bien, esta «reflexión» consiste en unas operaciones nuevas que versan sobre operaciones anteriores, a las que al mismo tiempo prolongan; y estas nuevas operaciones, necesarias para abstraer las vinculaciones anteriores, son lo que constituye la novedad del sistema derivado, mientras que la abstracción a partir de las operaciones anteriores garantiza la continuidad entre los dos sistemas; y, por fin, *d*) estas nuevas operaciones permiten reunir en nuevas totalidades sistemas hasta el momento separados.

Si así ocurre desde los estadios elementales del desarrollo de las operaciones, no hay razón alguna para admitir que tal proceso de construcción por abstracción reflectora pueda tener fin. Pues, por una parte, es indudable que no cabe agotar jamás el análisis de los presupuestos que lleve en sí un sistema operatorio, ya que ningún sistema constituye un comienzo absoluto; y, por consiguiente, siempre es posible abstraer nuevos aspectos de un sistema y «reflejarlos» por medio de operaciones nuevas: tal es, por ejemplo, la vía seguida por G. Cantor cuando extraía lo implicado en la operación de la correspondencia uno a uno, pese a ser tan primitiva. Y, por otra, dados esos sistemas operatorios, siempre puede hacerse versar la abstracción reflectora sobre lo que tengan en común, o intercompensable, y construir nuevas operaciones para «reflejar» tales intervinculaciones: desde la geometría analítica a las interacciones contemporáneas entre el álgebra y la topología, ésta es una vía que se abre una y otra vez, de forma incesantemente renovada.

Por consiguiente, la evolución histórica de las matemáticas en la dirección que conduce a una teoría pura parece seguir este doble movimiento de diferenciación o diversificación interna y de unificación externa de los sistemas (movimiento cuyos primeros esbozos podemos advertir en los estadios iniciales del desarrollo de las operaciones). Pero hay algo que es esencial

subrayar, desde el punto de vista psicológico, y que permite comprender por qué la matemática pura parece constituir una nueva forma de pensar que semejaría orientarse a contracorriente de las formas intuitivas iniciales: el que ni la diversificación ni la unificación mencionadas puedan desarrollarse sobre el plano mismo de construcción de los sistemas de partida, aquellos que se trataba precisamente de diversificar (cada uno en sí mismo) y de unificar (unos con otros). Si la abstracción y la generalización estuviesen de acuerdo con lo que suele imaginarse demasiado a menudo, no cabría plantear el problema así, como es natural; pues es frecuente concebir la abstracción como una simple segregación, y la generalización como una simple comprobación en diversos objetos del carácter común de las propiedades así segregadas: por ejemplo, el concepto de «verde» se obtendría al percibir hierba, árboles, etcétera, y separar de sus formas, tamaños, etc., el único elemento común, el color; y, si no insistimos sobre el hecho de que incluso en este ejemplo interviene todo un conjunto de operaciones con clases, no por ello deja de suceder que en este caso el concepto abstracto «verde» se encuentra en el mismo plano que los conceptos de partida, «hierba», etc. Mas, por el contrario, si la abstracción a partir de acciones y operaciones es necesariamente reflectora (esto es, supone una reconstrucción de los elementos operativos abstractos en nuevas operaciones), la diferenciación de un sistema por análisis de sus implicaciones iniciales conduce a un sistema nuevo, más abstracto; el cual, por serlo precisamente en un sentido «reflector», se encuentra situado en otro plano de construcción, que psicológicamente constituye una nueva forma de pensamiento; en ella se subordina y se integra la forma inferior, pero contradice, en ocasiones, a las intuiciones de que se partiera. Por no citar sino un ejemplo trivial: la intuición de los números naturales lleva a considerar primitivo el número entero, y procedentes de él, por división, los números fraccionarios; mientras que, en la teoría de las parejas obtenida por abstracción reflectora a partir de estos últimos, los enteros se convierten en un caso particular de parejas, entre otros varios. En cuanto a la construcción de nuevos sistemas por intervinculación de

sistemas antes separados, es patente que lleva, *a fortiori*, a una jerarquía de planos de construcción sucesivos.

De estas consideraciones se deducen tres consecuencias esenciales, que, a nuestro juicio, penetran en las razones psicológicas de la posibilidad de la matemática pura:

1) La primera consecuencia es la autonomía radical del desarrollo operatorio. Ya desde el nivel de la experiencia lógico-matemática, en el que las primeras nociones matemáticas, precientíficas, parecen haberse sacado de comprobaciones análogas a las comprobaciones físicas (si bien es un parecer equivocado, como hemos indicado insistentemente), las operaciones se construyen por abstracción a partir de acciones generales del sujeto, sin que deban nada a la especificidad física de los objetos ni a las características subjetivas de las acciones de los individuos como tales; y el desarrollo ulterior, a lo largo del cual se construyen incesantemente nuevas operaciones a partir de las precedentes, apela tan poco como aquél a fuentes exteriores a las estructuras operatorias mismas. Sin duda alguna, la historia de las matemáticas abunda en ejemplos de invenciones sugeridas por problemas físicos, empezando por el cálculo infinitesimal; pero una cosa es un concepto de unos objetos por abstracción a partir de la experiencia física, y otra verse estimulado por un problema nuevo; pues en este último caso los datos experimentales quedan simplemente asimilados o comparados a estructuras lógico-matemáticas anteriores, y son éstas las que experimentan la diferenciación con vistas a resolver el problema: así, en el caso particular de los comienzos del análisis, todo el mundo ha advertido el papel del álgebra como subestructura efectiva de esta nueva álgebra de lo infinito.

Pero si bien ni los objetos ni los sujetos individuales son determinantes en la evolución de las estructuras operatorias, ¿puede decirse lo mismo del sujeto colectivo, esto es, de los factores sociales y culturales (lenguaje, etc.)?; y, en particular, ¿no será preciso atribuir a la transmisión educativa lo esencial del desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas en el niño? Volveremos sobre estas preguntas en las conclusiones (capítulo 12); pero es necesario decir desde ahora que este problema

del papel de los factores sociológicos se plantea exactamente en los mismos términos que el de los factores psicológicos: ya se trate de los hombres en sociedad o del sujeto individual, han de distinguirse siempre: a) las estructuras operatorias de las acciones (acciones en común, intercambios, etc.) de b) los estados subjetivos que las acompañen (creencias, opiniones, etcétera). Ahora bien, las creencias colectivas no tienen más peso que las introspecciones individuales en la evolución de las operaciones; y en cuanto a las operaciones colectivas que intervengan en el intercambio (intelectual, etc.) y en la cooperación, son exactamente las mismas que las correspondientes a la coordinación de las acciones en general: reuniones, intersecciones, orden, correspondencia, etc. Por lo tanto, es evidente que las operaciones lógico-matemáticas son simultáneamente colectivas e individuales, de acuerdo con un círculo ineluctable, y ello desde la infancia: pues es patente que si bien las aportaciones educativas aceleran el desarrollo operatorio del niño, es preciso utilizar las operaciones para asimilar las que se le transmitan, lo cual nos conduce de nuevo al círculo de lo individual y lo colectivo. Pero ni éste ni la mixta naturaleza de las operaciones que funcionan en todo espíritu socializado disminuyen en nada la autonomía del desarrollo operatorio, pues la opinión pública es tan incapaz como la conciencia introspectiva de explicar por qué los sujetos reconocen que $2 + 2 = 4$ o que $A = C$ si es que $A = B$ y $B = C$, dado que estas verdades se refieren a las leyes de la coordinación de las acciones, ya sean éstas colectivas o individuales.

2) Este autónomo desarrollo de las estructuras operatorias conduce a una liberación progresiva de las formas con respecto a los contenidos intuitivos. No hablamos ahora de las razones que han llevado a la formalización (de que trataremos en el § 54), y que atañen a las crecientes exigencias de la demostración, sino del trivial hecho de que la matemática pura se diferencia de las matemáticas clásicas por un grado superior de abstracción, y además por separarse progresivamente de la intuición o por sustituir las formas imaginatorias y comunes con formas refinadas o «puras». Esta tendencia, por muy conocida que sea, reclama un comentario, ya que suele invocársela en

calidad de argumento probatorio de que las matemáticas se disocian cada vez más de las vinculaciones psicológicas que de tan buena gana se reconocen en lo que respecta a la formación del número natural y la del espacio euclídeo de tres dimensiones. Ahora bien, si se aceptan los esquemas genéticos que hemos propuesto antes, el progreso de la abstracción y la separación con respecto a las intuiciones llamadas naturales se encuentran inscritos, desde el punto de partida mismo, en la línea del desarrollo. En efecto, si nos atenemos a los tres estadios psicogenéticos de la acción sensorio-motriz, de las operaciones concretas y de las operaciones hipotético-deductivas, a lo largo de las cuales se construyen y luego se reconstruyan las estructuras elementales, integrándose sucesivamente en nuevas estructuras más generales, se comprueba que el motor mismo de tales reconstrucciones es la abstracción reflectora, mientras que sus productos son nuevas operaciones que versan sobre las operaciones o acciones anteriores: así pues, ya en los «peldaños» naturales hay cierta tendencia a la abstracción, con estructuraciones cada vez más disociadas de los objetos y, en este sentido, cada vez menos intuitivas. Ahora bien, hemos de recordar que, en estos niveles, por mucho que las operaciones utilizadas sean cada vez más conscientes, las estructuras de conjunto se mantienen totalmente ajenas a la reflexión[7] consciente del sujeto; en cuanto a los niveles de construcción de la ciencia, el matemático redescubrirá las estructuras que actuaban ya en el pensar precientífico, y construirá la teoría correspondiente; por lo cual es obvio que, por muy concretas que sean, a su vez, las construcciones iniciales de su ciencia (al nivel, por ejemplo, de la geometría griega o del álgebra árabe), los mismos procesos de abstracción reflectora y de superposición jerárquica de las operaciones conducirán, *a fortiori,* a las mismas crecientes exigencias de abstracción y a iguales superaciones con respecto a la intuición.

---

[7] En el sentido corriente de pensar reflexivo [*réflechie*] mientras que, en sus formas elementales, la abstracción reflectora [*réfléchissante*] puede «reflejar» [« *réfléchir*», que en otros contextos significa «reflexionar»], a modo de un reflector, los elementos abstraídos sobre otras operaciones nuevas, pero sin que participe en ello la conciencia del sujeto.

3) Mas hay una tercera consecuencia de esta interpretación genética: la generalidad de la presencia de las formas, bajo las especies de un encajamiento sucesivo jerárquico de ellas y de sus contenidos. Confinándonos a los estadios que hemos descrito del pensamiento natural, podría suponerse a primera vista que no hay «formas» más que a partir de los niveles operatorios, existiendo todavía una completa indisociación entre ellas y los contenidos al nivel de las operaciones concretas, y una liberación de ellas en el de las operaciones hipotético-deductivas: desde esta perspectiva, el pensamiento preoperatorio y, con mayor razón, la inteligencia sensorio-motriz, por proceder mediante puras coordinaciones de acciones, desconocerían todo mecanismo formal y consistirían en un simple manejo de contenidos. Ahora bien, esto no es así, en modo alguno, ya que desde el nivel sensorio-motor mismo existen mecanismos formales, aunque no en el sentido de que las formas podrían combinarse independientemente de sus contenidos, sino en el de que modifican éstos y entrañan una especie de implicaciones prácticas orientadoras de la conducta: tales formas consisten en «esquemas», en el sentido —ya indicado— de estructuras comunes a acciones sucesivas de la misma índole (por lo que un esquema será capaz de asimilarse nuevos contenidos y conferirles significación en virtud de las mismas implicaciones esquemáticas). Por lo tanto, no existen estados cognoscitivos cuyos contenidos se alcancen sin que medie forma alguna, sino que, ya a partir de la percepción, hay unos esquemas perceptivos (*Gestalten*, etc.) que informan el contenido sensorial; y en cuanto a éste, no existe jamás en estado aislado: como han hecho ver los gestaltistas, sólo interviene en calidad de contenidos estructurados, y no de factores estructurantes. Ahora bien, si esto es así, el cuadro que nos ofrece el pensamiento natural no es el de una dualidad simple entre, por una parte, los contenidos, a los que se llegaría directamente por vía intuitiva, y por otra, unas formas debidas únicamente al lenguaje o sólo al pensamiento hipotético-deductivo, sino el de una jerarquía continua tal que las estructuras cognoscitivas de cierto nivel desempeñen *simultáneamente* el papel de formas con respecto a las estructuras de niveles inferiores (que también son formas)

y el de contenido para con las de niveles superiores; de este modo, las estructuras operatorias concretas son formas frente a los esquemas sensorio-motores (pues los objetos a que se refieren las operaciones concretas están ya esquematizados por estos esquemas o por los esquemas perceptivos), pero constituyen contenidos con relación a las estructuras operatorias hipotético-deductivas.

Ahora bien, la lección fundamental de semejante estado de cosas es que la elaboración de las formas se halla inscrita en el programa del pensamiento natural mismo y opera mucho antes de que la matemática científica multiplique indefinidamente la cosecha formal. Pero, sobre todo, lo que se infiere es que la distinción entre las formas y los contenidos no tiene nada de absoluta y que si, por ejemplo, las matemáticas griegas eran notablemente formales comparadas con la matemática egipcia, etc., todo lo que sabemos del desarrollo operatorio concuerda con el que haya llegado después una época (de hecho, desde finales del siglo XIX), en la que han parecido esencialmente intuitivas y necesitadas de que se construyera un escalón superior de formalización para estar fundamentadas. Hénos aquí, pues, en presencia del principal problema que plantea la confrontación de la matemática pura con el pensamiento llamado natural (del que ahora sabemos que se presenta en estadios múltiples y profundamente diferenciados): la formalización propiamente dicha, en el sentido contemporáneo del término, ¿constituye una continuación del pensamiento natural o, como pensaba Pasch, está orientada en sentido inverso, pese a todo lo que acabamos de comprobar acerca de las posibles semejanzas entre los procesos genéticos y el desarrollo histórico de las matemáticas?

§ 54. Las razones psicológicas de la formalización.—Las razones de índole lógica que han motivado la formalización son evidentes, y no vamos a ocuparnos de ellas (véase el capítulo 3, de Beth); sólo las recordaremos con objeto de situarlas luego con relación a los procesos genéticos y de preguntarnos si el pensamiento formalizado prolonga éstos o se orienta en sentido contrario a su dirección inicial.

Euclides distinguía ya en la demostración matemática las proposiciones susceptibles de ser deducidas, o teoremas, de las indemostrables, o axiomas y postulados; pero, en virtud de la indemostrabilidad de los axiomas, trataba de no escogerlos más que en calidad de proposiciones evidentes por sí mismas, cosa que equivalía a renunciar a una demostración por la forma pura y a hacer que los fundamentos reposasen sobre la intuición [8]. Era natural, pues, que tarde o temprano se hiciera sentir la necesidad de construir una axiomática cuyos axiomas fuesen no otra cosa que identidades lógicas (programa ya enunciado por Leibniz y recogido por Frege y por Russell y Whitehead) o, por lo menos, proposiciones de las cuales pudieran deducirse los teoremas valiéndose de un puro formalismo lógico —a reserva de demostrar la no contradicción de tales construcciones (programas de Pasch y de Hilbert)—. Así concebida, la axiomática se vuelve puramente formal, y en principio, deja de cuidarse de las vinculaciones con la intuición. Ahora no nos importa que el ideal de la formalización integral haya fracasado, en especial tras la crisis gödeliana (sobre lo cual volveremos en el capítulo 11, § 57): queda el hecho de que la formalización, incluso limitando sus ambiciones, constituye una técnica fundamental de las matemáticas contemporáneas y, sin duda alguna, el rasgo más específico de la matemática pura. Por consiguiente, ésta es la perspectiva en la que nos importa indagar si tal tendencia se inscribe en la línea de los procesos genéticos conocidos o si, según aparenta, se lanza a contracorriente al sacrificar la evidencia intuitiva en beneficio de un formalismo cada vez más artificial.

I. Recordemos, por lo pronto (véase el capítulo 9, § 50), que las funciones generales de la inteligencia son tres: plantear problemas (interrogación), resolverlos (invención) y comprobar las hipótesis (demostración). Ahora bien, aun cuando la interrogación y la invención se encuentran orientadas en dirección progresiva y conllevan una apelación necesaria a la intuición, al menos combinatoria (aun en caso de que los problemas nuevos y las invenciones procedan a partir de unas es-

[8] Cosa que no impidió la introducción de elementos de carácter no intuitivo, artificiales: véase el § 31, de Beth.

tructuras abstractivas cualesquiera), la comprobación o demostración supone necesariamente una marcha en parte regresiva: el hecho mismo de que la supuesta solución del problema se siente como hipótesis significa una posible vuelta al *statu quo ante*, y lo propio de la demostración consiste en remontarse hasta él para seguir el camino conducente a la hipótesis, por más que cada uno de los pasos que se den en él esté ahora garantizado por una regulación que determine su validez. (Poco importa que esta cuestión de la validez exceda de la competencia de la psicología: la demostración, de todos modos, sigue psicológicamente un orden regresivo para volver a un punto de partida desde el que sea posible verificar la hipótesis.)

El problema es entonces el siguiente: si el orden regresivo que supone la demostración entra dentro del cuadro psicológico de los procesos simultáneamente progresivos y regresivos propios de todo acto intelectual completo, es obvio que tenemos que distinguir dos sentidos posibles del término de regresión, que acabamos de emplear: a) un sentido psicológico, que es relativo a la acción de averiguar por qué vía se haya obtenido la hipótesis, cosa que equivale a seguir la historia de los enlaces conducentes a ella, y b) un sentido lógico, referente a la acción de remontarse a verdades asentadas (teoremas) o admitidas (axiomas), anteriormente, con objeto de extraer de ellas la justificación de la hipótesis. El problema consiste, pues, en averiguar si existe relación alguna entre estos dos sentidos posibles de la regresión; dicho de otro modo, en ver si la regresión axiomática presenta alguna semejanza con el orden genético a la inversa.

Ahora es obligado hacer una segunda observación. Nos hemos percatado constantemente de que el proceso genético fundamental que permite construir una nueva estructura a partir de otra precedente es la «abstracción reflectora», que consiste en extraer ciertos elementos de la estructura del caso para reflejarlos en unas operaciones nuevas que los generalicen en una estructura superior; ahora nos damos cuenta de que semejante proceso es también simultáneamente progresivo (aparecen operaciones y estructuras nuevas) y retroactivo (se abstrae a partir de la estructura anterior); y puede admitirse, además, que

la invención de la hipótesis —proceso siempre tan misterioso— se efectúa dentro del marco de la «abstracción reflectora», ya que la hipótesis tiene siempre la función de colmar una laguna en las construcciones en curso. Pero no por ello deja de subsistir el problema de la eventual semejanza entre la regresión axiomática y la genética.

Enunciemos al llegar este momento las dos dificultades esenciales de este problema. La primera es que si bien la ambición inicial de la axiomática formalizante moderna, la de reducir las matemáticas a axiomas lógicos y, por consiguiente, lo complejo a lo simple, puede parecer que a grandes rasgos está conforme con el orden genético (pero con las reservas sobre las que hemos de volver en el capítulo 11, § 58), la elección de los axiomas se ha vuelto libre; y de ahí que sea posible construir una y la misma teoría, por ejemplo, la lógica de proposiciones, mediante axiomáticas múltiples y muy diversas entre sí, unas fundadas en axiomas intuitivamente evidentes (así, los cinco axiomas de Russell y Whitehead, reductibles, por lo demás, a cuatro) y otras sobre axiomas enteramente artificiales (el axioma único de Nicod, por ejemplo, o el de los lógicos polacos). La segunda dificultad no es menos considerable que ésta: la distinción entre axiomas y teoremas es sólo relativa al sistema elegido en cada caso, de modo que una proposición puede servir de axioma en un sistema, aun siendo demostrable en otro.

Sería absurdo, pues (y no tenemos intención alguna de hacerlo), que intentásemos mostrar que la marcha regresiva de la formalización conduce a descubrir unos axiomas que se correspondan término a término con elementos genéticamente primitivos, ya que si tal correspondencia existiese, ello significaría, por una parte, que podría someterse a la fiscalización de los hechos la regresión axiomática, cosa que está en contra del espíritu de la formalización, y, por otra, que podrían deducirse axiomáticamente los procesos genéticos, lo cual se opone a su naturaleza de despliegue histórico.

Por el contrario, lo que sostenemos es, ante todo, que existe cierta analogía global o funcional entre los dos géneros de análisis regresivos, aun cuando sin que haya interacción alguna directa entre ellos, dado que las cuestiones de hechos y las

de validez siguen siendo irreductibles (véase el capítulo 7, § 41). El axiomatista, para demostrar la validez de un sistema, trata de reducirlo al menor número posible de axiomas lo más débiles posible, concebidos como condiciones necesarias, y además suficientes, del sistema; y llega así a cierto número de proposiciones elementales al mismo tiempo independientes y no contradictorias entre sí (la comprobación de la independencia y la de la no contradicción se efectúan solidariamente, buscando modelos que satisfagan sucesivamente el conjunto de los axiomas salvo uno); la diversidad de las posibles axiomáticas no excluye, en absoluto, la búsqueda de las condiciones necesarias y suficientes de un sistema, y, en particular, comparándolas unas con otras se puede averiguar cuáles serán las condiciones más simples (débiles) posibles de las que quepa deducir el sistema. El psicólogo, por otra parte, para explicar la formación de una estructura, se dedica a un análisis regresivo que trata de reconstituir las «abstracciones reflectoras» que haya efectuado el sujeto para construirla, y consigue la explicación buscada cuando encuentra las estructuras elementales de las que se haya sacado la nueva estructura, juntamente con las operaciones por medio de las cuales se haya llevado a cabo el paso a ésta. Vemos, por consiguiente, que entre la reconstrucción axiomática y la genética existe la analogía global o funcional de una búsqueda de las condiciones más elementales que den cuenta de un sistema o de una estructura, pero que esta analogía no implica por ahora correspondencia alguna estructural, ya que las condiciones axiomáticas permiten deducir el sistema en cuanto a su validez, mientras que las genéticas no permiten sino una reconstrucción de hechos o causal.

II. Mas lo que vamos a suponer ahora es que hay, por lo menos, una cuestión heurística, que se puede enunciar como sigue: llamemos «condiciones elementales axiomáticas» a los axiomas necesarios y suficientes para deducir formalmente cierto sistema, y «condiciones elementales genéticas» a las estructuras de partida, juntamente con las acciones u operaciones que hayan permitido el paso a las estructuras cuya formación se pretenda explicar; entonces, la cuestión consiste en averiguar, en cada caso particular, si existe una relación entre lo ele-

mental de orden axiomático y lo elemental de orden genético tal que el conocimiento de lo primero favorezca el análisis de lo segundo.

Nótese que planteamos este problema de forma unilateral; cosa que no se debe solamente a naturales sentimientos de prudencia (pues un psicólogo sabe lo que pueda sacar de los análisis formales de los lógicos, pero no tiene ninguna competencia para decidir acerca de la posibilidad de una reciprocidad, y muy serios motivos para dudar de ella), sino, sobre todo, a las razones que siguen. Como el análisis genético versa sobre cuestiones de hechos, no puede aclarar, por principio, cuestiones de validez; en cambio, los hechos que entran en juego en los procesos genéticos son de dos tipos: a) los de comportamiento, que son de orden causal, y b) los normativos, es decir, los que el psicólogo observa en cuanto hechos, pero que el sujeto conoce en calidad de datos introspectivos acerca de lo verdadero y lo falso, y que, desde su punto de vista, tienen, pues, un alcance normativo (si bien distinto del de las normas formalizadas de la lógica). Ahora bien, cuando se estudian los procesos de «abstracción reflectora» que intervienen en un desarrollo dado, a partir de cierto nivel pertenecen a la categoría b); dado lo cual, puede suceder que las investigaciones formales sobre lo elemental axiomático iluminen en ciertos respectos el análisis de los hechos normativos que entren en juego en un proceso genético.

Demos algunos ejemplos. Podemos acordarnos, por lo pronto, del notable hecho, ya señalado (en el capítulo 8, § 47), de que en el niño el orden de construcción de las estructuras geométricas no concuerda con el orden histórico (primero la geometría euclídea, luego la proyectiva y después la topología), sino que, por el contrario, recuerda al orden de la construcción teorética (primero las intuiciones topológicas y después, simultáneamente, las estructuras proyectivas y las métricas, entre las cuales se encuentran las estructuras afines y las semejanzas).

Un segundo ejemplo se refiere a los conceptos topológicos. Es sabido que a este respecto existen por lo menos dos formas de axiomática: la que parte del concepto de punto para definir las correspondencias bicontinuas (homeomorfías) y la que, con

Kuratovski y, sobre todo, con Papert, parte de los conceptos de apertura y cierre. Ahora bien, tanto el conocimiento de una como el de la otra es útil desde el punto de vista genético, ya que ambas ayudan a comprender las intuiciones topológicas iniciales: pues las nociones genéticamente más elementales parecen corresponder, por una parte, a los cierres y a lo que de ellos se deriva (interioridad y exterioridad con respecto a una frontera), y, por la otra, no a los puntos como tales, sino a lo que Alexandrov y Hopf llaman *Berührungspunkte*, de lo que proceden los entornos, y luego las «separaciones», etc. También aquí la reconstrucción teorética proporciona un hilo conductor inapreciable para el análisis genético.

El tercer ejemplo es obvio. No hay nada más útil para analizar la formación genética de los números naturales que comparar las distintas axiomáticas del número entero, empezando por los cinco axiomas de Peano (en los que intervienen simultáneamente los conceptos de clase, de relación asimétrica transitiva, de serie en cuanto tal y de recurrencia), continuando por la formalización de los *Principia* (que engendra aparte el número cardinal, reduciéndolo a clases de clases, y el número ordinal, a base de las relaciones asimétricas) y terminando por la axiomática de Quine, que descansa en el concepto de sucesión. Entonces se cae inmediatamente en la cuenta de que estos diversos modelos corresponden a procesos genéticos posibles, pero muy distintos unos de otros, de tal manera que los problemas de la formación real se plantean con una precisión mucho mayor si se empiezan por comparar las implicaciones respectivas correspondientes a estas diversas formalizaciones. Así, en la perspectiva de Russell y Whitehead los números cardinales son independientes de los ordinales y de la serie de los números en sí misma, por lo cual podría aprenderse cualquier cardinal aisladamente sin que se hubiesen aprendido de antemano los cardinales de orden inferior; y esto es lo que sucede con las chovas y las ardillas, a las que O. Koehler ha logrado enseñar a que reconozcan, por ejemplo, una colección de cinco unidades, pero que no por ello sólo (sin nuevo aprendizaje especial) son capaces de distinguir una colección de cuatro de una de tres elementos. Con la óptica de Peano, en cambio, los

ordinales y los cardinales se corresponden necesariamente e implican desde el comienzo un elemento de recurrencia, lo cual sugiere un cuadro genético que encontramos en el niño, etc. Es inútil que hablemos más de esto aquí, ya que hemos de volver sobre el problema de los números enteros en el capítulo 11, § 56.

III. Lo único que nos importa por el momento es percatarnos de que la formalización, por artificial que pueda parecer en vista de la libertad que se reserva el axiomatista de seguir todos los caminos posibles, con tal de que sean formalmente válidos, constituye, en realidad, un instrumento irremplazable de disección de conceptos, que logra hacer evidentes sus implicaciones y conexiones estructurales. Ahora bien, sin que este análisis regresivo, llevado a cabo exclusivamente desde el punto de vista de la validez, corresponda sin más al análisis regresivo genético, que es independiente de ella y no tiene otra mira que la de llegar hasta las condiciones de la formación real, ocurre que el primer análisis favorece al segundo, cosa que plantea de nuevo el problema de la semejanza, del que habíamos partido.

Este problema lo suscitó por primera vez, creemos, F. Gonseth en su obra sobre *Las matemáticas y la realidad*, al describir los procesos de la intuición a base de cierta «esquematización»; e incluso llegó a bautizar ésta con el nombre de «esquematización axiomática», para expresar la idea de que en toda forma de pensar lógico-matemática, por concreta que sea, el proceso que sigue el saber no consiste en copiar la realidad, sino en esquematizarla, y que el comienzo de abstracción, que es inherente a todo esquematismo, conduce, tarde o temprano, a la esquematización de orden superior que es la axiomatización. Sin embargo, por próximos que nos sintamos a Gonseth en su perspectiva genética, sigue siendo, a nuestro entender, un poco demasiado empirista, ya que no distingue lo que hemos llamado la experiencia lógico-matemática de la experiencia física; y de ahí que su esquematización se encuentre demasiado cercana a una esquematización de los objetos como tales, mientras que para nosotros el esquematismo procede de una abstracción a partir de las acciones ejercidas sobre los objetos (cosa que, como hemos visto, da cuenta de un solo golpe del carácter

de construcción autónoma de las operaciones lógico-matemáticas).

Mas al sustituir la esquematización axiomatizadora de Gonseth por la «abstracción reflectora» se encuentra uno todavía en mejor situación para sostener que la formalización constituye una de las formas superiores de la estructuración del pensamiento (si bien esta vez lo sostenemos desde la óptica del sujeto, como en el apartado I, y no ya desde la del psicólogo, como en el II). En efecto, según la regla de la «abstracción reflectora», la formalización reconstruye los escalones anteriores (no axiomatizados) en forma de nuevas estructuras (que en este caso serán las estructuras axiomatizadas); y la reconstrucción se efectúa abstrayendo los elementos necesarios, pero también combinándolos por medio de unas operaciones renovadas (que será el procedimiento empleado en la demostración).

Veamos que así es. Los rasgos del pensamiento formalizado, haciendo abstracción de las técnicas mismas de la formalización, pueden reducirse a tres principales: a) invierte el orden espontáneo, que se orienta hacia la construcción, para buscar los axiomas capaces de soportar el peso de la demostración y para explicitar las reglas de ésta; b) limita hasta llegar a un mínimo el recurso a la intuición, considerando las proposiciones manejadas únicamente desde el punto de vista de la forma, independientemente de su contenido intuitivo, y c) tiende a reducir en la medida de lo posible las verdades matemáticas a verdades lógicas o, por lo menos, a hacer que unas y otras se encuentren en perfecta continuidad.

Ahora bien, el rasgo a) no constituye una diferencia fundamental entre el pensamiento natural y el formalizado, ya que todo intento de demostración, a cualquier nivel, equivale siempre a invertir el orden de construcción de las estructuras En el caso de la formalización, la novedad consiste en que el esfuerzo del análisis regresivo se remonta hasta poner en forma los instrumentos mismos de la demostración; pero, una vez desencadenado el proceso de «abstracciones reflectoras», no hay razón alguna para que se detengan antes de semejante frontera; de modo que, por mucho que la formalización atraviese ésta, se mantiene en la línea de las reconstrucciones por escalones que

ascienden hasta las estructuras elementales; e incluso ahora que la reconstrucción tiende a ser integral, se inscribe en un marco ya esbozado por el pensamiento natural.

El rasgo b) no es sino la generalización de las tendencias fundamentales de la matemática «pura», tendencia cuyas manifestaciones elementales hemos advertido ya en las formas aparentemente más empíricas de la construcción de los entes lógico-matemáticos.

En cuanto al c), que sin duda alguna es históricamente el más nuevo, si se comparan las axiomáticas contemporáneas con las que satisfacían a los matemáticos griegos, que eran intuitivas y ajenas a la lógica pura, sostenemos que no se puede formar juicio de alguna precisión a su respecto, desde el punto de vista de la comparación entre el pensamiento formalizado y el natural, más que si se reemplazan resueltamente las consideraciones introspectivas por las genéticas. Bajo el ángulo del sentido común, fundado sobre la introspección del adulto medio, la lógica es una cosa, la aritmética otra y la geometría una tercera, y si bien es evidente que cabe aplicar la primera a la segunda y las dos primeras a la tercera, la reducción de las dos últimas a la primera (tanto en el sentido de una simple continuidad en la diferenciación de las estructuras como en el de una reducción propiamente dicha), en cambio, carece de toda significación. Dado lo cual, la formalización, bajo el aspecto c), parece harto opuesta a las tendencias del pensamiento natural. Pero si se examina genéticamente cómo se constituyen en el niño de cinco a siete-nueve años, con independencia de la enseñanza escolar, las estructuras geométricas y aritméticas, se descubre, por el contrario, que unas y otras hunden sus raíces en unas estructuras operatorias esencialmente lógicas (clases y relaciones): ya sea que, como sucede con el número, se trate de elementos enteramente lógicos, pero en una síntesis nueva (véase el capítulo 11, § 56), ya que, según acontece con el espacio, sean intuiciones por imágenes de lo continuo, pero coordinadas cualitativamente gracias a operaciones de encajamiento partitivo, de orden, etc. Por lo tanto, al restablecer una continuidad muy estrecha entre la lógica y las matemáticas, la formalización no se orienta, en modo alguno, en dirección opuesta a lo

que revela el análisis genético, sino que, por el contrario, confluye con las conexiones más primitivas desde el punto de vista genético —aunque en un plano enteramente distinto y por medio de técnicas más o menos «artificiales».

En conclusión: por mucho que la formalización constituya la variedad más refinada de la «abstracción reflectora», no cabe considerarla radicalmente extraña al pensamiento natural. Es cierto que excede ampliamente las pocas reconstrucciones sobre escalones posteriores de construcciones efectuadas en otros escalones anteriores (reconstrucciones que, como hemos visto, son de rigor en cuanto condiciones del desarrollo); pero si aparentemente las excede cualitativamente, ello se debe a que la tarea que se propone es la de llegar a una reconstrucción integral y no simplemente a reconstrucciones parciales; sólo que precisamente por querer ser integral es por lo que esta reconstrucción propia de la formalización confluye con ciertas vinculaciones elementales y fundamentales reveladas por el análisis genético; y en el capítulo 11 hemos de ver todavía más ejemplos de ello.

§ 55. En qué sentido pueden colaborar los métodos genético y axiomático en una formalización del pensamiento real.— El proyecto de formalizar ciertas estructuras del pensamiento natural tropieza con dos clases de objeciones. Unas vienen a sostener, en definitiva, que semejante proyecto es irrealizable, ya que al pensar natural le falta el rigor imprescindible para que quepa axiomatizarlo: Tarski ha hecho ver, por ejemplo, que no es posible establecer un isomorfismo entre las teorías formales y las «teorías ingenuas», lo cual, naturalmente, excluye que se puedan formalizar estas últimas siguiendo el modelo de las primeras. Las objeciones del segundo tipo, por el contrario, equivalen a admitir que, puesto que la diferencia entre el pensamiento natural y el pensamiento lógico reposa precisamente en el hecho de que el segundo está formalizado, y no el primero, si también se formalizase éste se llegaría al pensamiento lógico científico, y se haría perder al pensamiento natural sus propiedades específicas. Pero estas dos objeciones no nos parecen válidas más que si se admiten previamente o la

irreductibilidad radical o la completa reductibilidad de las formas del pensar natural a la lógica formalizada; y, sobre todo, suponen que sólo se acepten como modelos de formalización las lógicas actualmente axiomatizadas, por más que éstas se hayan construido con unas finalidades muy diferentes a las de servir de modelo al pensamiento natural: en especial, con la de fundamentar las matemáticas.

La meta que ahora perseguimos es muy distinta, y no la alcanzan ni la una ni la otra de las dos objeciones indicadas: se trata, simplemente, de averiguar con precisión la especificidad de esta o aquella estructura del pensamiento real en su desarrollo, así como las diferencias que presente con respecto a las lógicas acabadas. Suponiendo, por ejemplo, que los «agrupamientos» elementales de clases y de relaciones (véase el capítulo 8, § 45) desempeñen un papel importante en el desarrollo y, además, que, como veremos un poco más adelante (en el capítulo 11, § 56), se encuentren en el punto de partida de la construcción de los números naturales, puede ofrecer interés formalizar la estructura del «agrupamiento», no para asimilarla a un álgebra de Boole, a un reticulado, etc. (puesto que precisamente difiere de ellos), sino exclusivamente para mostrar la especificidad del «agrupamiento», es decir, sus limitaciones, en una forma que sea comprensible al lógico (aun cuando pueda no servirle de nada), y cuyo conocimiento sea útil al genetista.

Antes de mostrar de qué modo esta empresa permite, de hecho, una colaboración entre los análisis genético y axiomático, recordemos, primeramente, que es realizable. En efecto, uno de los miembros de nuestro Centro Internacional de Epistemología Genética, el lógico y matemático J. B. Grize, ha llevado a cabo, precisamente, una formalización del «agrupamiento» sin más que expresar sus limitaciones naturales bajo la forma de postulados restrictivos; y hemos visto el resultado obtenido en el capítulo 8, § 45. Vamos a ver luego (capítulo 11, § 56), asimismo, cómo ha formalizado Grize la construcción del número a partir de los agrupamientos de clases y de relaciones, en forma correspondiente a la especie de «síntesis» que revela el análisis genético.

Dicho esto, los servicios que se tiene derecho a esperar de

tales realizaciones (y de otras análogas, a las que las presentes abren el camino) son los siguientes.

En lo que respecta al análisis genético, es claro, ante todo, que semejante formalización permite medir con precisión lo que le falte a cierto nivel para llegar a una estructura más completa; por ejemplo, un álgebra booleana; pero también lo es (cosa que nos parece instructiva) que si bien la formalización es un procedimiento que parece artificial en cuanto técnica reflexiva que emplea ciertas costumbres de codificación y un simbolismo particular, se trata de un procedimiento que no tiene nada de artificial en cuanto a sus resultados, ya que permite formalizar incluso las estructuras que entran en juego en el pensamiento del niño de siete a doce años. Así pues, desde el punto de vista psicológico no hay nada que impida admitir que la lógica formal constituye la formalización de cierta forma del pensamiento natural, que no sería ni la del niño ni la del adulto no lógico profesional, sino la del propio lógico en cuanto sujeto natural con unas aptitudes especializadas (lo mismo que el creador musical no se queda al nivel de la música popular, sin que por ello constituya un ente sobrenatural, pese al «artificial» simbolismo de su forma de escribir las notas).

En lo que se refiere al punto de vista del análisis axiomático, el interés del concepto de «agrupamiento» puede ser nulo. Pero también puede suceder que se convierta en positivo, de igual manera que con Cantor la trivial operación de la correspondencia ha adquirido una importancia hasta el momento inexistente. Mientras llega semejante salto (poco probable, por lo demás), cabe preguntarse, de todos modos, según sugirió Beth en la sesión del Centro en la que Grize expuso sus resultados, si no habrá otros métodos matemáticos de construcción de los agrupamientos. En resumen, en cuanto se formaliza una estructura puede suscitar problemas; sólo es esencial advertir que si los suscita para el lógico es en cuanto formalizada, y no en cuanto «natural», ya que el hecho de que corresponda a una estructura natural no añade ni quita nada a la validez intrínseca de semejante formalización: lo mismo que para el psicólogo todo lo que existe es natural, comprendido el pensar del lógico, para éste todo lo formal es válido, comprendida la formalización de una estructura del pensar natural.

Una vez precisado esto, sigue siendo verdad que, reconociendo una vez más las respectivas competencias de la lógica y de la psicología genética, estas investigaciones paralelas —en las que no ha de haber interferencia entre las cuestiones de validez y las de hechos— pueden llevar, en un plano epistemológico, y no ya lógico o psicológico, a mejorar la colaboración entre los dos géneros de estudios, con el fin de puntualizar las relaciones existentes entre lo que en el parágrafo precedente llamábamos lo elemental axiomático y lo elemental genético. En efecto, si aquéllo es lo que soporta todo el peso de las demostraciones, en tanto que ésto no constituye otra cosa que un punto de partida fáctico de invenciones o construcciones, podría parecer que no hay relación alguna entre lo uno y lo otro; pero lo elemental genético conlleva sus propias implicaciones, que orientan las construcciones ulteriores, provocando la nueva elaboración, destinada a completar las estructuras de partida colmando sus lagunas; y cabe preguntarse, por consiguiente, si lo elemental genético no constituye, acaso, una «representación» —en sentido matemático— débil de lo elemental teorético, o suponer la existencia de alguna otra solución que confiera a aquéllo la propiedad de reflejar de alguna forma ésto. Por nuestra parte, no proponemos solución alguna, pero insistimos solamente sobre el hecho de que ahí hay un problema; ahora bien, la formalización de las estructuras naturales más elementales posible puede desempeñar a este respecto un papel instructivo, al puntualizar simultáneamente sus semejanzas con lo elemental teorético y sus lagunas, juntamente con la manera de colmarlas.

11 ALGUNAS CONVERGENCIAS ENTRE LOS ANALISIS FORMALES Y LOS GENETICOS

En este capítulo nos gustaría presentar dos o tres ejemplos de convergencia entre investigaciones genéticas y axiomáticas, ya que tales encuentros son capaces de mostrar que ciertos resultados generales del análisis formal son explicables psicológicamente apoyándose en lo que sabemos de las actividades del sujeto.

§ 56. La construcción de los números naturales.—Desde Frege y Peano a los *Principia mathematica* y de Whitehead-Russel a Quine, Church, von Neumann y otros muchos autores, los lógicos nos han proporcionado múltiples formalizaciones de los números naturales; puede ser interesante comparar los resultados correspondientes con lo que hoy sabemos de la construcción psicológica de los números en cuestión.

I. Se plantea un problema previo a este respecto, problema que proporciona ya un caso en que aquella comparación es instructiva. Frente a los esfuerzos de los axiomatistas por reducir el número a elementos lógicos (clases o relaciones), H. Poincaré y la tradición intuicionista hasta Brouwer han sostenido la irreductibilidad del número a los entes lógicos: según Poincaré, la intuición de $n + 1$ o de la iteración sería al mismo tiempo primitiva e independiente de la lógica, de suerte que antes de preguntarse qué variedad de reducción del número a las clases o a las relaciones corresponde mejor al proceso natural, conviene examinar la cuestión previa de la semejanza o

la irreductibilidad entre los números y las clases o las relaciones.

Ahora bien, en lo concerniente a este debate inicial, los datos genéticos proporcionan todo un conjunto de informaciones muy matizadas:

1) No encontramos que el desarrollo del número se adelante con respecto a las clases (estructuras de clasificación) o a las relaciones asimétricas transitivas (estructuras de seriación), sino, por el contrario, una construcción simultánea de las estructuras de clases, de relaciones y de números. Para mostrarlo, conviene ante todo elegir un criterio mínimo de la adquisición del número, ya que el criterio verbal (posesión de los nombres de los números hasta 10 o hasta 20, por ejemplo) está lejos de ser suficiente: por ejemplo, un niño puede saber contar hasta 10 y no admitir que una colección de 5 objetos seguirá siendo igual a 5 si se distribuyen éstos en dos subcolecciones. Por consiguiente, vamos a considerar como condiciones mínimas del número, no que el sujeto sea capaz de efectuar una numeración verbal (que es siempre muy equívoca desde el punto de vista operatorio), sino 1) que sepa igualar dos colecciones pequeñas (de cinco a siete elementos) por correspondencia biunívoca entre sus términos, y 2) que piensa que tal equivalencia se conserva en caso de que, sin añadir ni retirar ningún elemento, simplemente se modifique la disposición espacial de una de las colecciones, de tal suerte que sus elementos no se encuentren ya mirando directamente a los de la otra. Admitido esto, se observa lo siguiente:

a) Ante una hilera de seis elementos ligeramente espaciados, el niño comienza, en cierto estadio, I, por juzgarla equivalente a otra hilera que construirá de manera que tenga la misma longitud, pero sin cuidarse de la correspondencia término a término (por ejemplo, de ocho elementos bastante apretados). En el estadio II elige como criterio de equivalencia la correspondencia uno a uno, pero con la condición de que los elementos de la hilera modelo estén mirando a los de la hilera copia (correspondencia óptica): basta entonces juntar o separar los elementos de una de las dos colecciones para que deje

de considerarse equivalente a la otra (no conservación de la suma)[1]. Finalmente, en el estadio III (de siete a ocho años, por término medio), la equivalencia queda garantizada mediante la correspondencia, pero se conserva aunque ésta deje de ser óptica.

b) Ahora bien, estos tres estadios de cierto aspecto de la construcción del número corresponden a los tres estadios que se observan en la esfera de las clasificaciones. Cuando al niño se le presenta cierto número de objetos para clasificar (figuras geométricas, objetos usuales, flores, animales, etc.), se observa, en efecto, que durante el estadio I el sujeto consigue construir grupos teniendo en cuenta, en parte, semejanzas y diferencias cualitativas, pero respetando, además, la limitativa condición (que no se le había prescrito, en modo alguno) de que las colecciones construidas se dispongan formando ciertas figuras espaciales (alineamientos, cuadrados, etc.): así pues, estas «colecciones figurales»[2] incorporan a la clasificación un principio de configuración espacial, lo mismo que el estadio numérico I incorpora a la cantidad numérica un rasgo de magnitud espacial. Durante el estadio II, las colecciones construidas ya no son figurales, y dan lugar a subdivisiones y reuniones que, entre las dos, conducen a los encajamientos sucesivos, igual que sucede con las inclusiones jerárquicas de clases; pero, primero, no hay anticipación de estos encajamientos de acuerdo con un plan de conjunto, de modo que se construyen por tanteos, y segundo, no están acompañados todavía por una cuantificación concebida como algo necesario (cuantificación por la que, si *A* y *A'* están encajados en *B*, haya más elementos en *B* que en *A'*). Durante el estadio III se adquieren, por fin, los rasgos de la anticipación y de la cuantificación.

c) En lo que se refiere a la seriación de las relaciones asi-

---

1 P. Gréco ha hecho ver, además, que entre la no conservación general (comienzos del estadio II) y la conservación (estadio III) existe un nivel intermedio en el cual el niño, cuando se rompe la correspondencia óptica, espera encontrar el mismo número, pero continúa negando que se trate de la misma cantidad: véase «Quantité et quotité», en *Études d'Épistémologie génétique*, vol. XIII, estudio I.

2 Véase Inhelder y Piaget, *La genèse des structures logiques élémentaires* (Delachaux et Niestlé), capítulo 1.

métricas transitivas, se encuentran tres estadios análogos cuando se utilizan pruebas tales como, por ejemplo, la de ordenar una decena de elementos por tamaño creciente. En cierto estadio, I, el niño no consigue la seriación completa, sino únicamente logra obtener parejas (pequeño/grande) o pequeños conjuntos, cada uno de ellos ordenado internamente, pero incoordinables entre sí; en el estadio II el sujeto logra la seriación completa, si bien por tanteos sucesivos, y en el III encuentra un método sistemático, consistente en coger primero el elemento más pequeño, luego el menor de todos los restantes, etcétera: luego comprende de antemano que cualquier elemento, *B*, es a la vez mayor que los precedentes y menor que los siguientes (lo cual conduce, por ello mismo, a una comprensión de la transitividad, según hemos visto en el capítulo 8, §§ 45-46).

Este paralelismo entre las evoluciones respectivas del número, de las clases y de la seriación constituye, pues, un primer indicio en favor de su interdependencia y en contra de la autonomía inicial del número.

2) Tal indicio se ve reforzado por el examen de los errores del sujeto en los estadios I y II, en lo que se refiere al número; pues estos errores manifiestan, realmente, que hay una especie de indiferenciación relativa entre las estructuras que se construyan, ya sea con respecto a las clases o con respecto a las relaciones. Por ejemplo, es frecuente que al extraer de dos conjuntos desiguales, *M* (20 elementos) y *N* (50 elementos), dos subconjuntos respectivos iguales, *M'* y *N'*, de 7 elementos (habiéndose cogido cada uno de los *M'* con una mano de *M*, en tanto que se cogía cada uno de los *N'* con la otra mano de *N*), el niño crea que los 7 elementos *N'* son más numerosos que los 7 *M'*, por haberlos sacado de los *N*, que eran más que los *M*: en este caso se interpreta el rasgo «numeroso» en comprehensión, y no en extensión, por una especie de indiferenciación entre estos dos aspectos de las colecciones. Ahora bien, esta indiferenciación es justamente lo que caracteriza a los estadios I y II del desarrollo de las clasificaciones y lo que, en especial, explica la generalidad de las «colecciones figurales» del I (en las que la extensión se mantiene en el estado de propiedad espacial, como en el estadio I del número, pero esta vez intervi-

niendo en los rasgos de comprehensión de la colección)[3]. Igualmente se observan dificultades en cuanto al número que provienen de la evolución de la seriación: por ejemplo, cuando se va a retirar un elemento tras de otro, hasta llegar a 0, de una colección de 30 elementos, el sujeto no está seguro de que se haya pasado necesariamente por un estado en el que la colección era igual a otra, testigo, de 15 elementos, como si se hubiera podido saltar de 16 a 14 sin pasar por 15, o como si hubiese pasos intermedios entre 16 y 15 o entre 15 y 14; dicho de otro modo, a este nivel la serie de los números se sigue asimilando a una serie cualquiera, y la conexidad especial de aquella serie (todo número difiere de otro en un múltiplo de 1) se asimila a una conexidad cualquiera (todo elemento es mayor o menor que cada uno de los demás)[4].

Estos tipos de errores, que presentan otros muchos ejemplos, muestran, pues, la indiferenciación relativa inicial entre las estructuras de los números, las clases y las relaciones antes de que los primeros adquieran sus características específicas.

3) Por otra parte, y precisamente en virtud de las indiferenciaciones señaladas en 2), en los niveles elementales no se observa intuición alguna de $n + 1$, en el sentido de una conciencia clara de la iteración y de los procesos recursivos. Ya la falta de conservación de los conjuntos numéricos (estadios I y II, punto 1a) se opone por sí sola a lo que se considera ser el rasgo primitivo de semejante intuición; y el examen genético de la conmutatividad (incluso para igualdades tales como $2 + 3 = 3 + 2$), de la sucesión de los números pares e impares y de la generalización de propiedades tan triviales como $S(Sn) = n + 2$ (el sucesor del sucesor del número n es igual a $n + 2$) hace ver claramente el carácter tardío de la elaboración de semejantes intuiciones (P. Gréco, art. cit.).

De todos estos diversos datos puede concluirse, pues, que, tanto en el campo del pensamiento natural como desde el punto de vista de la formalización, la construcción del número pro-

---

[3] INHELDER y PIAGET, *loc. cit.*

[4] Véase A. MORF, «Recherches sur l'origine de la connexité de la suite des premiers nombres», en *Études d'Épistémologie génétique*, volumen XIII, estudio II.

cede a partir de elementos lógicos de clases o de relaciones, y no constituye una elaboración independiente fundada en intuiciones a la vez primitivas y *sui generis.*

II. Pero la respuesta que así damos a esta cuestión previa no justifica todavía, en lo que concierne al pensamiento natural, que aceptemos tal o cual forma de reducir el número a las clases o a las relaciones, ni siquiera el reduccionismo en general, dado que el número entero podría no estar constituido más que por elementos lógicos aun cuando conllevara la necesidad de una síntesis nueva y específica entre estos elementos.

Vamos a examinar al respecto la significación, desde el punto de vista del pensamiento natural, de la célebre reducción, propuesta por los *Principia,* del número cardinal a clases de clases equivalentes por correspondencia biunívoca. A primera vista parece muy «natural» semejante reducción, dado el carácter al mismo tiempo muy elemental y muy precoz de la operación de hacer corresponder término a término, tan espontánea y extendida entre los niños pequeños. Podría suponerse, pues, que éstos construyen el número elaborando colecciones equivalentes por correspondencia biunívoca; lo cual es cierto en líneas generales, pero con una reserva muy importante.

La dificultad fundamental que este modelo de reducción presenta desde el punto de vista psicológico (y tal vez incluso desde el lógico) es, en efecto, que hay dos formas muy distintas de correspondencia término a término:

A) una correspondencia biunívoca *cualificada,* consistente en fundar las correspondencias en semejanzas cualitativas: por ejemplo, a una hilera de figuras distintas que comprende un cuadrado, un círculo, un triángulo, etc., el sujeto hará corresponder término a término otro cuadrado, otro círculo, otro triángulo, etc.; y

B) una correspondencia biunívoca *cualquiera,* consistente en hacer abstracción de las cualidades y en asociar a uno cualquiera de los elementos de la primera colección uno cualquiera de los de la segunda: por ejemplo, en el caso de las dos hileras precedentes, el cuadrado de la primera se hará corresponder al círculo o al triángulo de la segunda con la misma facilidad que al cuadrado, con tal de que a un solo elemento de una co-

rresponda un solo elemento de otra y recíprocamente, sin que se omita ninguno por ninguno de los dos lados.

Ahora bien, por más que insistan sobre el hecho de que se puede definir la correspondencia de uno a uno en términos puramente lógicos, que no impliquen más que el «uno» lógico (el idéntico) y no el aritmético, Russell y Whitehead emplean la correspondencia cualquiera, y no la cualificada: cuando se hacen corresponder los meses del año con los apóstoles de Cristo, los mariscales de Napoleón o los signos del Zodíaco, con objeto de que de esas equivalencias se desprenda el número 12 como clases de tales clases, ello no sucede porque exista una correspondencia cualificada entre el mes de febrero, el apóstol Pedro, el mariscal Ney y el signo de Cáncer, sino porque un elemento cualquiera de una de las clases puede hacerse corresponder a uno cualquiera de los elementos de las demás, con independencia de sus cualidades.

Sin pronunciarnos sobre la cuestión de si esta situación afecta o no a la reducción propiamente lógica, no cabe duda de que suscita una cuestión psicológica: habiendo admitido que los primeros sistemas de clases (los «agrupamientos» elementales: véase el capítulo 8) no conllevan más que «correspondencias cualificadas» (por ejemplo, en el caso de los agrupamientos multiplicativos o tablas de doble entrada) y dejan de lado la «correspondencia cualquiera», el problema central es el de averiguar cómo puede pasar el sujeto de la primera a la segunda de estas dos formas distintas de correspondencia. Como es natural, lo consigue procediendo a abstraer de todas las cualidades; pero entonces los elementos individuales se vuelven, *ipso facto*, equivalentes entre sí, por más que sigan siendo distintos, y ese doble carácter de equivalencia generalizada y de distinción mutua es lo que los transforma en unidades aritméticas (ya que la sola utilización de la identidad lógica aboliría las distinciones, puesto que éstas, desde el punto de vista de los sistemas de clases, no reposan más que sobre las diferencias cualitativas, de las que precisamente se había hecho abstracción). Desde la óptica psicológica, pues, habría un círculo vicioso si se pasase de la clase al número recurriendo simplemente a la correspondencia cualquiera, ya que ésta supone la

unidad aritmética, de modo que el número se introduce ahora en la clase, en lugar de sacarse de ella. En cuanto a valerse solamente de la correspondencia cualificada, es un procedimiento que no puede bastar, ya que dos clases equivalentes por correspondencia cualificada engendran una clase multiplicativa cualificada, y no una clase de clases equivalentes bajo el ángulo exclusivo de la extensión.

III. Por consiguiente, si queremos resolver en el terreno de los hechos psicológicos el paso de la clase al número o a la correspondencia cualquiera, nos damos cuenta de que el problema principal es el de averiguar cómo cabe que, una vez descartadas las cualidades por abstracción, los elementos, que se habrán convertido de este modo en equivalentes, puedan distinguirse entre sí. Sean, por ejemplo, las clases singulares A_1, A_2, etcétera, de cualidades distintas; una vez eliminadas estas últimas, ¿cómo explicar que el sujeto no llegue a la tautificación $A + A = A$ (ya que, sin cualidades distintivas, se tiene $A_1 = A$, $A_2 = A$, etc.), sino que, por el contrario, consiga obtener la iteración, $A + A = 2A$, merced a distinguir cada una de estas A de las demás, pese a la ausencia de cualidades distintivas? En lenguaje concreto, esta pregunta viene a plantearse, por ejemplo, de la forma siguiente: si una colección de fichas, de colores, etc., distintos se reemplaza por otra colección de fichas de las mismas dimensiones y colores, ¿cómo las distinguirá el sujeto (en las operaciones de poner en «correspondencia cualquiera», etc.)?

La respuesta es evidente: en caso de que se hayan abstraído las cualidades diferenciales o que falten, no hay más que un medio de distinguir los elementos individuales, que es el de ordenarlos de una u otra manera (por orden espacial, temporal, de enumeración simbólica, etc.). Y, de hecho, cualquier niño al que se pida que considere los elementos de una colección como equivalentes entre sí y, sin embargo, distintos (por ejemplo, para ponerlos en «correspondencia cualquiera» con los de otra colección) los colocará en un orden lineal, los moverá uno tras otro, en orden temporal, etc.

Desde el punto de vista psicológico, el paso de la clase al número supone, pues, que ha de intervenir necesariamente

un factor extraño a los sistemas formados exclusivamente por clases, factor que es el orden serial, tomado de los agrupamientos de relaciones asimétricas transitivas. Antes (en el apartado I) habíamos reconocido que, de conformidad con las hipótesis que entran en juego en las formalizaciones de los lógicos, el número está constituido psicológicamente por elementos puramente lógicos, contrariamente a las suposiciones intuicionistas de Poincaré y otros autores. Pero, según lo que acabamos de entrever, parece resultar que, por el contrario, involucra una síntesis nueva, que no pertenecería a las estructuras lógicas de las que dispone el sujeto en el nivel considerado de la formación del número: así, el número cardinal no provendría exclusivamente de las estructuras de clases, sino que supondría una síntesis entre ellas y las de seriación. Por consiguiente, ¿es que el examen de las formalizaciones no nos habrá servido más que para plantear problemas, pero no para resolverlos? Veamos las cosas más de cerca.

IV. Al nivel de la construcción de la sucesión de los enteros, el niño dispone, entre otros, de los dos «agrupamientos» siguientes:

α) Dadas las clases singulares A, A', B', etc., puede reunirlas de la siguiente forma: $A + A' = B$, $B + B' = C$, etc., con posibilidad también de la operación inversa, $B - A = A'$, etc., de la anulación, $A - A = 0$, de la tautificación, $A + A = A$ y de la asociatividad limitada a las reuniones y sustracciones no tautológicas.

β) Dados unos elementos distintos desde el punto de vista de cierta cualidad (tamaño, etc.), puede ordenarlos por las relaciones $A(a)A'$, $A'(a')B'$, $B'(b')C'$, etc. Y de ello provienen la seriación de las relaciones, $a + a' = b$, $b + b' = c$, etc.; las inversiones, $b - a' = a$, etc.; la anulación, $a - a' = 0$; la tautificación, $a + a = a$, y la asociatividad limitada a las operaciones no tautológicas.

Como ya hemos visto antes (en el capítulo 8, § 45), estos dos agrupamientos tienen una composición sumamente restringida, debido al hecho de su carácter de contigüidad (composición paso a paso) y de su ausencia de combinatoria; además,

no pueden aplicarse simultáneamente a los mismos elementos, si es que éstos están cualificados: pues o bien se los considera bajo el ángulo de sus equivalencias parciales y dan lugar, entonces, a una clasificación (agrupamiento α), o bajo el de sus diferencias ordenables, caso en el que dan lugar a una seriación (agrupamiento β); pero no es posible clasificarlos y seriarlos simultáneamente, esto es, no se los puede reunir independientemente de un orden (entre A y A', B y B', etc.) y ordenados.

Por el contrario, tan pronto como se hace abstracción de las cualidades, se siguen inmediatamente las consecuencias que enunciamos a continuación; y sostenemos que bastan para explicar la formación de los números naturales:

1) Ninguno de los dos agrupamientos puede funcionar sin el otro; o sea, se funden necesariamente en un solo sistema. En efecto, si se dejan de lado las cualidades que distingan entre sí a A, A', B', etc., ya no será posible distinguirlos, lo cual llevaría a $A + A = A$, etc., salvo que los ordenemos de la forma $A \rightarrow A \rightarrow A$, etc. (siendo $\rightarrow$ la relación de sucesión): luego el mantenimiento de la estructura α supone la intervención de la β. Pero si se quieren ordenar en la forma $A \rightarrow A \rightarrow A$, etc., unos elementos a los que la abstracción de las cualidades haya hecho equivalentes, el único medio de distinguir, desde el punto de vista del orden mismo, el segundo A del primero, el tercero del segundo, etc., es el de considerar que el primer A está precedido por la clase nula, que el segundo lo está por la clase (A), que el tercero está precedido por la clase $(A + A)$, etc.; de modo que para utilizar la estructura β ha de suponerse la intervención de la α.

2) Esta fusión de los dos agrupamientos en uno solo, que proviene necesariamente, pues, de la abstracción de las cualidades, conduce, por otra parte, *ipso facto*, a suprimir las limitaciones de los agrupamientos. En efecto: a) Las A ordenadas en la forma $A \rightarrow A \rightarrow A$ conservan el mismo orden si se permutan los elementos, es decir, habrá siempre un primer elemento, otro segundo, etc., aun cuando se los cambie de lugar; y llamaremos «orden vicariador» al orden así generalizado.

b) Las clases $A + A = B$, $B + A = C$, etc., se conservan

las mismas si se permutan las A; lo cual equivale a decir que cualquier A puede reunirse con cualquier otra en una clase de rango B, sin tener ya en cuenta ni la contigüidad ni la composición paso a paso (encajamientos generalizados fundados sobre el orden vicariador).

3) La sucesión de elementos-unidades $A \rightarrow A \rightarrow A$, etc., siendo $A + A = B$, $B + A = C$, etc., presenta todos los rasgos de la sucesión de los números, primeramente en el sentido de que es una sucesión, y luego porque $A + A = B$, etc., equivale a $1 + 1 = 2$, etc.

Pero es esencial reparar en que ya no se trata de una reducción del número a la clase o a la relación asimétrica (deduciéndolo de estos entes lógicos), sino, en realidad, de una síntesis del número natural, simultáneamente ordinal y cardinal, a partir de los dos agrupamientos fundidos en un solo sistema de estructura nueva. En este caso, ¿es preciso concluir que la génesis psicológica, por no concordar con la formalización de los *Principia*, es irreductible a toda formalización? Ciertamente que no: por el contrario, vamos a recordar, en el apartado V, que el proceso genético que acabamos de resumir ha sido susceptible de formalización (por J. B. Grize) y, en el apartado VI, algo que ofrece no menos interés desde el punto de vista de la convergencia entre los datos genéticos y los resultados de la formalización: que, de hecho, todas las formalizaciones del número natural han recurrido, si bien frecuentemente bajo una forma más implícita que a plena luz, a apelar simultáneamente a las clases y las relaciones.

V. Hemos visto en el capítulo 8, § 45, cómo había formalizado J. B. Grize la estructura del «agrupamiento» al introducir, entre otros, ciertos postulados restrictivos para dar cuenta de las limitaciones de composición que conlleva el ejercicio natural de esta estructura.

Admitido esto, Grize parte de un agrupamiento de encajamientos de clases (en el que, por hipótesis, todas las clases elementales sean singulares) y de otro de relaciones asimétricas transitivas y conexas (seriación), y hace ver que tanto desde el punto de vista de su formalización como desde el de su fun-

cionamiento natural, estos dos agrupamientos se encuentran, al mismo tiempo, vinculados mutuamente e irreductibles, puesto que las clases equivalentes (*a, b, c, d,* o bien *b, a, c, d,* etc.) pueden corresponder a ordenaciones distintas.

Por el contrario, si hacemos abstracción de las cualidades, transformando los elementos de estos agrupamientos en elementos unidad, se siguen ciertas consecuencias. La primera es que todas las clases singulares que correspondan a estos elementos se vuelven mutuamente sustituibles, cosa que parece indicar la reducción del agrupamiento, de estas clases a dos únicamente, la clase nula y la $\{a\}$, en virtud de la tautología $\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$; pero esta misma sustitución, cuando se la aplica al agrupamiento de seriación, no elimina todo orden, sino que, simplemente, introduce un «orden vicariador» tal que, pese a tales sustituciones, exista siempre un elemento, digamos $\{a\}$, que no siga a ningún otro, luego un elemento, $\{b\}$, que siga a éste, etc. Por consiguiente, si bien las clases singulares del agrupamiento de clases son todas equivalentes, cabe, sin embargo, evitar su tautificación y distinguirlas mediante un orden vicariador, lo cual equivale a fusionar en uno sólo los dos agrupamientos, el de clases y el de relaciones; y esto es lo que confiere al nuevo sistema las propiedades formales de los números naturales.

En efecto, esta síntesis de ambos agrupamientos en un nuevo sistema entraña una modificación de las definiciones D_1 y D_2, y, sobre todo, de los postulados G_0 a G_8 que habíamos mencionado en el § 45 del capítulo 8.

Puesto que, por hipótesis, todas las clases singulares son equivalentes, tomemos dos de ellas, tales como (m) y (n) y hagamos

(Def. 1) $$\pi = \text{df.}\ (m) \urcorner > \ulcorner\ (n)$$

La relación π es, como la del agrupamiento de las seriaciones ($<$), asimétrica, transitiva y conexa; y, además, es biunívoca.

(Def. 2) $$\leqq .= \text{df.}\ \pi^{*}$$

siendo π^* la relación ancestral de la π. Por lo tanto, esta definición significa que si x e y son dos objetos tales que $x \pi y$, x es idéntico a y, o $x \pi y$, o hay un z tal que $x \pi z$ y $z \pi y$, y así sucesivamente.

Sea ahora el sistema (N, $\leq$, +, —), siendo N un conjunto no vacío, $\leq$ la relación arriba definida y + y — dos operaciones binarias; designemos con x, y y z variables que tomen los valores en N, y admitamos, además,

(Def. 3) $$x = y = \text{df.}\ x \leq y \wedge y \leq x$$

definición que corresponde a la D_1 del capítulo 8, § 45.

Una vez dicho esto, Grize revisa la lista de los postulados G_0 a G_8 (del capítulo 8, § 45) y anota las modificaciones que es preciso introducir en virtud de haber añadido la unidad. G_0 conserva su papel, y, por lo tanto, tiene su correspondiente en N_0; en cuanto a las limitaciones debidas a G_0b) y c), se explicaban por las diferencias cualitativas entre los elementos, que ya no encontramos ahora; en cambio, la operación «—» estaba limitada por otras razones, que siguen siendo válidas; así, pues, ahora se tendrán los postulados que siguen.

(N_0) Si $y \in N$ y si $x \leq y$, se tendrá a) que $x \in N$;
si $x, y \in N$, se tendrá b) que $x + y \in N$;
si $x \in N$ y si $x \leq y$, se tendrá c) que $y - x \in N$.

No hay que hacer modificación alguna en lo que respecta a la asociatividad, la conmutatividad y la monotonía:

(N_1) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(N_2) $x+y=y+x$

(N_3) $x \leq y \,.\supset.\, x+z \leq y+z$.

El postulado G_4 expresaba una propiedad característica de los agrupamientos, debido al hecho de que unos objetos cualificados reunidos consigo mismos dan $A + A = A$; por consi-

guiente, ahora tenemos, en lugar de aquel postulado, el que sigue:

(N_4) $0+x=x$.

Una vez eliminado G_4, las restricciones impuestas por G_5 desaparecen también:

(N_5) $y=x+z\,.\equiv.\,y-x=z$.

G_6 da ahora lugar a un teorema, y, por lo tanto, se vuelve inútil en cuanto postulado; en cuanto a G_7 lleva a:

(N_7) Existe un $1 \in N$ tal que $x \pi y\,.\equiv.\,x+1=y$,

postulado que expresa la hipótesis del elemento unidad. Y finalmente se tiene:

(N_8) Existe un $0 \in N$ tal que $0 \leq x$

Grize extrae de los postulados así modificados algunos teoremas y seis metateoremas, de los cuales los cinco primeros corresponden a los cinco axiomas de Peano (comprendido el de recurrencia), y el sexto proporciona una definición recursiva de la suma. Recíprocamente, los postulados se satisfacen «si x, y y z designan números naturales y si las operaciones tienen su sentido habitual. Estamos en situación, pues, de afirmar que el sistema (N, $\leq$, $+$, $-$) es el de los números naturales, incluyendo el cero» (pág. 93).

VI. Así pues, la formalización de Grize hace ver que el proceso natural observado en la construcción del número en el niño puede corresponder a una construcción formal; la cual, como es obvio, no adquiere por ello valor formal superior alguno, pero demuestra, al menos, la posibilidad de la convergencia de que hablábamos. Ahora bien, este hecho es tanto más notable cuanto que semejante formalización no consiste en «deducir» el número de las clases o de las relaciones, como es sóli-

to, sino, por el contrario, en dar cuenta de él por medio de una «síntesis» de un agrupamiento de encajamientos de clases con el agrupamiento de la seriación; y ello en el sentido preciso, parece, en que empleaba Hegel el término de síntesis (las clases y la relación $\not\leq$ constituyen «momentos» del número, que luego quedan «superados» en el sentido de *aufgehoben*).

Acaso se responda que con ello no tenemos una convergencia mayor entre el proceso genético y las construcciones formales habituales, puesto que la formalización de Grize se aleja de éstas. Pero hay algo que nos parece todavía mucho más revelador de la convergencia que estamos intentando señalar en el punto tan particular, pero central, de la construcción del número: es que si se examinan de cerca las reducciones clásicas, que se colocan en el plano de la deducción del número a partir de los entes lógicos, resulta que en cada una de ellas se encuentra una doble apelación a la clase y a la relación $<$, conforme a lo que creíamos haber encontrado desde el punto de vista genético, y a lo que la formalización de Grize indica explícitamente.

Ante todo, volvamos a mirar, a este respecto, la reducción del número cardinal a las estructuras de clases, tal y como la presentan Whitehead y Russell en los *Principia mathematica*. Dejando aparte la teoría de tipos, a primera vista no intervienen en tal reducción más que las clases (o clases de clases), a las cuales quedan asimilados los números, y las operaciones de reunión (U), a las que se asimila la adición (+); en cuanto a la operación de poner en correspondencia uno a uno (y abstrayendo de las dificultades sobre las que hemos insistido en el apartado II), no se define más que a base de la extensión de las clases y de la identidad lógica. Pero si A es un número-clase, ¿cómo cabe dar cuenta de que $A + A \neq A$, pese a ser $A \cup A = A$, cosa que nosotros interpretamos genéticamente diciendo que únicamente la intervención del orden, $A \rightarrow A$, permite distinguir dos elementos equivalentes y llegar así a $A + A = 2A$ (y que Grize ha formalizado del modo correspondiente)? De hecho, Whitehead y Russell no proceden de otra manera, si bien en forma velada, no explícita: pues su solución consiste en arreglárselas para que dos números —clases A y B—, que figuren como términos de una suma no tengan jamás los mismos miembros,

y para conseguirlo, introducen, simplemente, diferencias de orden.

Sean, por ejemplo[5], $A =_{df} (a, b, c)$ y $B =_{df} (a, d)$. La operación $A \cup B$ combina los elementos de A y los de B, y conduce a $C =_{df} (a, b, c, d)$; en cuanto a la operación $A + B$, se reduce a $A' \cup B'$, siendo

$$A' =_{df} [(a, o), (b, o), (c, o)]$$
$$\text{y } B' =_{df} [(o, a), (o, b)].$$

Puesto que A y A' tienen la misma potencia y que lo mismo sucede con B y B', se puede afirmar, desde el punto de vista numérico, que

$$(A+B) = (A' \cup B') = [(a, o), (b, o), (c, o), (o, a), (o, d)]$$

y nunca se encontrarán clases A' y B' que tengan los mismos miembros.

Vemos, en resumen, que el procedimiento para llegar a $A + A \neq A$ consiste en distinguir entre a, o, y o, a, o sea, en reemplazar los elementos a por parejas ordenadas. Ahora bien, independientemente de que el método es artificial, recurre de hecho a la noción de orden, que excede de las puras estructuras de clase, y confluye de este modo con la forma en que el pensamiento natural apela al orden para distinguir dos elementos distintos, pero equivalentes entre sí.

Recíprocamente, a primera vista parece que la exposición de Quine en la *Mathematical Logic* retrotrae la adición al puro concepto de orden: si n y m son dos números, y si S designa la función sucesor, de la definición 46 de Quine se puede extraer la fórmula

$$m + n = S^n m,$$

esto es, $m + n$ es igual al n-ésimo sucesor de m. Pero, dejando de lado todas las consideraciones de estratificación, m y n son

---

[5] Véase GRIZE, *loc. cit.*, pág. 95.

también clases, de modo que una vez más nos encontramos frente a una combinación de clases y de relaciones.

En su formalización del número, Von Neumann distingue, por su parte, los números por el conjunto de los antecesores que conlleve cada uno de ellos: por ejemplo, los números m y n son distintos si a m corresponden $m-1$ antecesores, y a n, $n-1$ antecesores. Mas difícilmente podria expresarse con mayor claridad que la estructura del número conlleva un orden de sucesión y que, por lo demás, para distinguir dos elementos de los cuales uno sea anterior al otro no hay otro medio que el de reunir en clases el conjunto de sus antecesores.

Resumiendo: la diferencia principal entre los formalismos usuales y el proceso de construcción natural, que creemos haber hecho patente y que Grize ha formalizado, es que en estos dos últimos casos se habla explícitamente de síntesis entre los encajamientos de clases y la seriación, mientras que en las formalizaciones de tipo aparentemente deductivo, por oposición a sintético o dialéctico, se apela simultáneamente a las clases y a las relaciones asimétricas, o bien (como sucede con Russell y Whitehead) no se recurre inicialmente más que a una de las dos estructuras, pero reintroduciendo luego más o menos subrepticiamente la otra sobre la marcha, bajo el aspecto de un artificio de exposición o de construcción. La comprobación de estos hechos habla, pues, en favor de una convergencia entre los procesos naturales y la formalización tanto como la construcción formal de Grize, explícitamente destinada a corresponder al proceso genético observado.

§ 57. El fracaso de la reducción de lo superior a lo inferior.—De Leibniz a Russell, la tradición logicista (véase el capítulo 3) ha tendido constantemente a reducir las matemáticas a la lógica y, en general, los sistemas superiores o más complejos a los inferiores o más elementales. Las dificultades de la reducción del número a las clases o a las relaciones constituyen un primer ejemplo de las resistencias que se encuentran cuando se persigue semejante ideal reduccionista [6]. Pero el pro-

---

[6] Sobre las dificultades del reduccionismo lógico, en general, véase S. PAPERT, «Sur le réductionnisme logique», *Études d'Épistémologie génétique,* vol. XI, estudio III.

blema suscitado por la idea misma de reducción parece haber quedado resuelto en forma general por K. Gödel cuando demostró la imposibilidad de asentar la no contradicción de la aritmética o de una teoría deductiva cualquiera empleando solamente medios tomados de esta teoría o de sistemas más débiles, tales como la lógica.

Tras aquella demostración, Gentzen ha demostrado que cabe asentar la no contradicción de la aritmética elemental partiendo de sistemas más fuertes, que contengan una formalización de la recurrencia transfinita, pero el resultado gödeliano se mantiene íntegramente y, en consecuencia, condena la deductibilidad completa de lo superior a partir de lo inferior; en particular, como hace hincapié Beth (véase el § 20), nos proporciona un instrumento para jerarquizar los sistemas en más y menos fuertes, y confiere así un criterio objetivo a las calificaciones de superior e inferior.

Ahora bien, semejante conclusión tiene un alcance epistemológico considerable, pero lleva consigo varias interpretaciones posibles acerca de la naturaleza de los entes lógico-matemáticos y de sus relaciones con el sujeto. Esta no reductibilidad conduce, ante todo, a una consecuencia inmediata, sobre la cual es posible ponerse de acuerdo independientemente de las interpretaciones epistemológicas generales: es la condena de cierto atomismo lógico, que corresponde a una tendencia natural del espíritu (o, más bien, artificial, pero muy generalmente difundida) y que nos impele a descomponer los sistemas complejos en otros más simples, y éstos en elementos previos capaces de existencia propia. Pues desde el momento en que lo inferior está subordinado a lo superior en cuanto a sus condiciones de no contradicción, son los sistemas de conjunto, por el contrario, los únicos que presentan la garantía de una existencia autónoma; pero entonces, ¿cuál es la variedad de existencia que les corresponde?

Es obvio, en primer lugar, que de la crisis gödeliana podría sacarse un nuevo argumento en favor del platonismo: desde el momento en que los sistemas inferiores se encuentran subordinados a los superiores en cuanto a sus garantías de coherencia, puede parecer que el edificio matemático es, por una par-

te, independiente del sujeto (ya que éste no logra conferir una no contradicción demostrable a los sistemas a que tiene acceso en primer término) y, por otra, está suspendido de su ápice (si es que se puede hablar así), puesto que los escalones inferiores adquieren coherencia únicamente a partir de los estadios superiores.

Sólo que, en este caso particular, la interpretación platónica choca con su dificultad constante en forma todavía más grave de la ordinaria. La dificultad general del platonismo consiste en que difícilmente puede concebirse como algo acabado un edificio que hemos aprendido a conocer por construcciones aparentes progresivas, salvo que estas construcciones se traduzcan como descubrimientos, como si fuesen encuentros con una realidad exterior; pero entonces ¿por qué tales descubrimientos obedecen a reglas de sucesión análogas a las de construcción? Ahora bien, en este caso particular no mejoran las cosas al subordinar la no contradicción de los estadios inferiores a su sometimiento a los superiores, dado que éstos, a su vez, no gozan de ninguna no contradicción que fuese demostrable por sus propios medios, sino que se hallan subordinados a unos escalones todavía más elevados, y así sucesivamente. Por otra parte, cabe comprender que el platonismo apoye una sucesión infinita en un ente infinito que la contenga de antemano en el caso de que tal sucesión consista en una jerarquía de entes parciales, tales como los ordinales transfinitos, por ejemplo; pero cuando la sucesión consiste en hacer que la no contradicción de un sistema repose en otro sistema superior, es más difícil concebirla sin un dinamismo operativo, ya que si un sistema existe como ser independiente del sujeto, no puede existir sino en el estado de no contradictorio, y ello a todos los niveles; mas si el rasgo de no contradictorio proviene de su subordinación a los sistemas superiores, ¿en qué consiste ésta, fuera de la cual el sistema inferior se vería amenazado de contradicción? Dicho sucintamente: en la perspectiva platonizante, habría que concebir la noción gödeliana de la no contradicción subordinada al sistema superior como algo relativo a nuestra manera humana y limitada de aprehender los entes matemáticos, más que como expresión de los caracteres intrínsecos

de estos «entes» independientes de nosotros; a menos que se concibiesen tales entes como construcciones de un sujeto trascendental, que se ocuparía constantemente de asentar la no contradicción de los niveles inferiores por medio de creaciones de nivel superior; pero semejante apelación a un supersujeto activo nos aleja del platonismo y nos acerca al sujeto a secas.

En la perspectiva del constructivismo genético, por el contrario, no solamente la irreductibilidad de lo superior a lo inferior se inscribe fácilmente en el marco de la «abstracción reflectora», sino que penetra de manera muy directa en las razones profundas de la construcción. En efecto: la dificultad principal de la interpretación genética consiste en explicar por qué las construcciones se suceden de forma ininterrumpida y, sobre todo, por qué son capaces de nuevas creaciones: de cierta estructura se saca una estructura superior por abstracción de elementos a partir de aquélla, pero esta abstracción supone que los elementos experimenten una reflexión merced a operaciones nuevas, que los reconstruirán a la vez que los traspongan; y de lo que se trata es de explicar cómo es que tales operaciones son simultáneamente nuevas y algo impuesto de antemano por la estructura inferior. La respuesta es que, al ser limitada la estructura, sus lagunas reclaman una construcción destinada a colmarlas; sólo que hay una infinidad de maneras de completar una estructura incompleta, y queda por comprender por qué se elige una de ellas, la que parezca más simple y más probable.

Los resultados de Gödel sugieren una primera respuesta a tales preguntas: la construcción continúa indefinidamente porque ningún sistema se basta a sí mismo, no tanto comparado a otro sistema, cualquiera que éste sea, sino por carecer de una coherencia interna lo suficientemente fuerte como para garantizar su propia no contradicción. Por consiguiente, todo sistema ha de estar por sí mismo orientado en la dirección en que pueda reforzar su propia consistencia: tal habría de ser la lección psicológica que haya que sacar de la irreductibilidad de lo superior a lo inferior; y es de esperar que sea posible mostrar que las nuevas operaciones que intervienen en una «abs-

tracción reflectora» con vistas a garantizar tal reflexión no tienden solamente a ampliar la estructura de partida o a generalizarla, sino que tienden a hacerlo en la dirección misma que refuerce la no contradicción. Como psicológicamente la no contradicción conseguida por el sujeto proviene de la reversibilidad de su pensamiento, ello equivale a decir que la ampliación de cualquier estructura se efectúa en la dirección de un progreso de la reversibilidad; y tal es lo que efectivamente se observa en el ya citado ejemplo del paso de los agrupamientos del grupo *INRC*.

Pero, recíprocamente, las leyes de la «abstracción reflectora» hacen comprensible por qué un sistema no se basta jamás a sí mismo en lo que se refiere a su propia no contradicción: si no hay sistema que pueda acabarse más que saliendo de sí mismo para reflejarse en un sistema superior, es natural que la formalización de aquél no permita garantizar su propia no contradicción.

En resumen: este ejemplo de la irreductibilidad de lo superior a lo inferior parece prestarse más a la convergencia entre el análisis formal y el genético que a una interpretación estática (y, en especial, platonista) de la realidad matemática. Ya la sola consideración de una posible jerarquización de los sistemas en más débiles y más fuertes, teniendo en cuenta que los superiores permiten garantizar la no contradicción de los inferiores, posee un gran interés desde el punto de vista de la eventual convergencia, pues es poco probable que la construcción genética comience por los sistemas más fuertes; lo mismo que, por razones bien distintas, pero paralelas, la construcción axiomática parte de las condiciones mínimas en lugar de concederse a sí misma todo de antemano.

§ 58. Los límites de la formalización.—Puede considerarse que uno de los límites esenciales de la formalización es la fundamental ley que acabamos de recordar, en virtud de la cual no se puede demostrar la no contradicción de un sistema por sus propios medios o por medios más débiles. No vamos a volver sobre la cuestión una vez más; pero hay dos razones mucho más triviales de limitación de la capacidad formal sobre

las cuales sí conviene que hagamos hincapié ahora, ya que señalan simultáneamente las diferencias más salientes entre los sistemas formalizados y las estructuras naturales y la convergencia más profunda que se oculta tras las diferencias.

Como ya decía insistentemente Pascal en sus *Pensées*, no cabe definir ni demostrar todo, ya que cualquier sistema deductivo parte necesariamente de nociones indefinibles, que sirven para definir las otras, y de proposiciones indemostrables, que se eligen como axiomas y que sirven para demostrar las proposiciones demostrables o teoremas. Es perfectamente sabido, además, que la distribución de conceptos en indefinibles y definidos y de proposiciones en axiomas y teoremas es cuestión de elección, y no de propiedades intrínsecas; pero, cualquiera que sea el sistema elegido, siempre habrá indefinibles e indemostrables, y si bien ambas cosas figuran en el sistema formalizado en calidad de puntos de partida de la construcción formal, no están, a su vez, engendradas ni construidas formalmente, según es obvio. A esto es a lo que vamos a llamar la limitación por abajo de la formalización.

Por otra parte, sabemos hoy que una de las condiciones de una formalización estricta es la de distinguir entre, por una parte, el sistema formal mismo en sus aspectos sintácticos y, por otra, un metalenguaje —o semántica— que otorgue significación a los elementos. Ahora bien, si es que cabe formalizar este metalenguaje, con la condición de «interpretarlo» [7], ello no puede hacerse *en el lenguaje mismo*. Y aquí tenemos lo que vamos a llamar un límite superior de la formalización.

En efecto, sea *A* una teoría formalizada de una u otra forma. Es preciso, entonces, distinguir entre la sintaxis de *A*, o sea, *Sin*(*A*), que será el conjunto de nombres, predicados, relaciones y juicios que se refieran a las letras, signos diversos y fórmulas de *A*, y la semántica de *A*, o sea, *Sem*(*A*), que será todo lo concerniente a la interpretación que se dé a los símbolos de *A*. En estas condiciones, el metalenguaje que englobe *Sem*(*A*) *y* *Sin*(*A*) no puede ser formalizado más que por medios más poderosos que los de *A:* «If *Sem*(*A*) *and* *Syn*(*A*) —escribe, por ejemplo,

[7] Se dirá que se ha interpretado en *A* la semántica de *A* cuando, siendo *X* una proposición cualquiera de *Sem* (*A*) y siendo *X'* el resultado cuando se reemplacen en *X* todos los conceptos de *Sem* (*A*) por su definición, *X'* sea verdadera (o falsa) a la vez que *X*.

Beth[8]— are collectively referred to as the *metasystem Met* (*A*) of *A*, then both results [obtenidos antes] taken together show that *Met*(*A*) must surpass *A* both in its means of expression and its method of proof» *; de donde se deduce que para formalizar *Met*(*A*) será preciso introducir un metametalenguaje, *Met Met*(*A*), el cual, para estar a su vez formalizado, habrá de incluir medios todavía más poderosos, etc.

Por lo demás, percatémonos, antes de continuar, de que esta limitación superior de la formalización no constituye, en modo alguno, una limitación de su valor. Pues, por una parte, como en especial subrayan Hilbert y Bernays[9], siempre es posible construir sistemas englobantes; y por otra, según acentúa Grize en un estudio del Centro de epistemología genética[10], que estas limitaciones formales mismas son lo que hace fértiles para el conocimiento a los sistemas formales.

En una palabra, si bien la formalización se encuentra limitada al comienzo, ello se debe a que es inexcusable dar definiciones y, con tal objeto, tomarlas de alguna parte (lo cual, por vía de regresión, lleva tarde o temprano al pensamiento común); y la formalización está asimismo sistemáticamente limitada a la llegada, ya que, cualquiera que sea el número de sistemas englobantes que se vea uno conducido a construir, siempre quedará el uso indispensable de lo que Curry llama el lenguaje *U*, o lenguaje de comunicación, cuyos términos se suponen inteligibles para el lector.

Ahora bien, el pensamiento natural, justamente por no estar formalizado, desconoce tales distinciones: ni incluye dos categorías de elementos comparables, respectivamente, a los axiomas y a los teoremas (o a los indefinibles y a los conceptos definidos), ni presenta dos campos distintos que correspondan al lenguaje y al metalenguaje, sino que reúne ambos aspectos sobre un mismo plano.

Las evidentes diferencias entre el pensamiento natural y esos sistemas formales —diferencias tan aparentes que semejan ser fundamentales, y que ocultan casi completamente las convergencias que de hecho se encuentran recubiertas por

---

[8] E. W. Beth, *The foundations of mathematics* [«Los fundamentos de la matemática»].

* «Si nos referimos colectivamente a *Sem* (*A*) y *Sin* (*A*) con el nombre de *metasistema* de *A*, *Met* (*A*), entonces los dos resultados [obtenidos antes], tomados conjuntamente, hacen ver que *Met* (*A*) tiene que exceder a *A* tanto en medios de expresión como en métodos de demostración». (*N. del T.*)

[9] *Grundlagen der Mathematik* [«Fundamentos de la matemática»], Berlín (Springer), 1939, tomo II, pág. 268.

[10] Que aparecerá en un próximo fascículo de los «Études d'Épistémologie génétique».

ellas— se explican ante todo por las distintas funciones o «intenciones», correspondientes a una y otra clase de actividades. En efecto, la formalización está orientada exclusivamente hacia la demostración, y tal es la razón por la cual está obligada a proceder por orden de sucesión, esto es, de forma lineal: primeramente los axiomas, luego los teoremas y, por fin, el metalenguaje. El pensamiento natural, por el contrario, comienza *in medias res* y tiene por función esencial la de inventar, o sea, la de ampliar el sistema de los conocimientos adquiridos; ahora bien, este sistema es circular, cosa que explica al mismo tiempo la ausencia de diferenciación «natural» entre los escalones sucesivos que distingue la formalización y el hecho de que, cuando se introducen tales distinciones juntamente con un orden lineal, la formalización se encuentre limitada simultáneamente por abajo y por arriba.

Por lo demás, tanto las relaciones existentes entre las significaciones que se encuentran en el uso de un lenguaje como las que median entre las significaciones de las acciones atestiguan que todo sistema natural de conocimientos es circular (salvo, precisamente, en los casos en que haya un comienzo de demostración, o sea, cuando el pensamiento introduzca un orden lineal parcial que se oriente en la dirección de la formalización). En efecto, las significaciones que se vinculan a las palabras de un idioma son interdependientes, y F. de Saussure ha podido mostrar que en todo momento de la evolución de la lengua constituyen un sistema sincrónico independiente de la diacronía, sistema en el que se equilibran entre sí múltiples relaciones, en particular de oposición; por consiguiente, es inútil buscar un orden lineal entre significaciones, razón por la cual es tan frecuente que incluso las definiciones de los diccionarios sean frecuentemente circulares. En cuanto a los sistemas de acciones, e incluso de operaciones, sucede lo mismo: cada elemento es solidario de los demás, de suerte que no se lo comprende más que en función de interacciones; y si se coloca uno en el punto de vista del desarrollo, se encuentra sin cesar lo que J. M. Baldwin llamaba ya «círculos genéticos», de los que tenemos un buen ejemplo en las relaciones existentes entre los conceptos y los juicios: todo concepto es un producto de

la actividad judicativa, lo cual parece que debe conducir a que atribuyamos al juicio una anterioridad necesaria; pero todo juicio efectivo consiste en enlazar conceptos, lo cual invierte la situación.

En resumen: la realidad concreta, o toda variedad de actividad o de pensamiento naturales, se presenta siempre bajo forma de una totalidad cuyos elementos son solidarios y no pueden disociarse de modo absoluto. En virtud de su característica de aprehensión relativamente simultánea, la intuición consigue a veces captar en tal solidaridad las significaciones y sus implicaciones respectivas; pero desde el momento en que, por el contrario, se trata de comprobar o de demostrar tal o cual proposición, se introducen unas series lineales parciales a partir de proposiciones ya admitidas anteriormente o juzgadas evidentes (y que, por lo tanto, desempeñan momentáneamente el papel de los axiomas en una teoría formal), series parciales que son lineales únicamente por haberse elegido arbitrariamente un punto de partida no demostrado para el análisis regresivo. En cuanto a las teorías formales, en virtud precisamente de su intención de demostrar o de alcanzar la máxima validez, exigen, en cambio, que se introduzca un orden estrictamente lineal, en el que se proscriba toda circularidad en calidad de vicio del método; pero ello se consigue pagando el precio de las condiciones que siguen, cuyas consecuencias no implican ningún círculo vicioso en la demostración misma, pero conducen a encontrar otra vez en las relaciones entre el punto de partida y el de llegada del sistema la situación circular de conjunto propia del pensamiento natural.

Tales condiciones consisten, primeramente, en introducir cierto número de definiciones, que operarán únicamente en el cuerpo del sistema, y, además, exclusivamente en su aspecto explícito, sin recurrir bajo ningún concepto a sus posibles significaciones implícitas. Sólo que estos conceptos definidos únicamente pueden serlo por medio de otros no definidos, ya que la existencia de indefinibles es necesaria debido a la imposibilidad de una regresión infinita; ahora bien, es evidente que los indefinibles son solidarios de otros elementos pertenecientes al metalenguaje, lo cual es ya testimonio de la existencia de una

situación circular, que no presenta riesgos desde el punto de vista de la demostración, pero que tampoco permite alcanzar un orden lineal absoluto.

Luego es menester elegir los axiomas en número mínimo y, al mismo tiempo, independientes y no contradictorios, lo cual plantea un problema, ya que la no contradicción excluye, sin duda alguna, una independencia absoluta: la independencia requerida es, en efecto, relativa al sistema, y se asienta reconstruyendo éste sin recurrir al axioma cuya independencia se quiera demostrar, con lo cual se averigua qué es lo que él aporta. No hay aquí dificultad alguna desde el punto de vista de la construcción formal, pero como la no contradicción del sistema no puede demostrarse formalmente por sus propios medios o por medios más «débiles», la relación entre la independencia de los axiomas (relativa al sistema) y su no contradicción permite una vez más que subsista la posibilidad de una situación no estrictamente lineal.

En cuanto al metalenguaje, apela necesariamente al pensamiento natural o no formalizado, lo cual sumerge de nuevo al sistema en el de las totalidades no lineales.

Parece, pues, en conclusión, que los límites intrínsecos de la formalización, entendidos en el sentido de la imposibilidad de conseguir un orden estrictamente lineal, manifiestan, pese a las aparentes diferencias entre el orden lineal relativo y la circularidad propia del pensamiento natural, una convergencia de hecho en cuanto se trata de determinar por qué métodos se obtiene tal linealidad relativa. Desde el punto de vista sincrónico, el pensamiento natural es esencialmente circular, y desde el diacrónico, está empeñado en una sucesión de construcciones cuyas estructuras de partida, cuando se las somete al análisis genético, retroceden en una regresión sin fin, y cuyas estructuras de llegada se abren siempre sobre nuevas construcciones que ensanchan los círculos sin romperlos jamás. La formalización, por su parte, pone fin a las regresiones sin fin al elegir como punto de partida de las definiciones y las demostraciones unos elementos indefinibles e indemostrables y rompe los círculos estableciendo un orden lineal, entre unos esca-

lones demostrativos que disocia entre sí artificialmente; pero como los indefinibles y la coherencia de partida de los indemostrables se hunden en el pensamiento natural y el metalenguaje confluye con éste, la linealidad obtenida no se obtiene, pues, más que recortando una parte en el seno de los círculos dialécticos que constituyen la ley del pensar natural.

De estas pocas reflexiones sobre la psicología de las matemáticas nos gustaría sacar ciertas conclusiones relativas a los problemas epistemológicos generales, en el sentido en que hemos tomado el término de epistemología en el capítulo 7, § 42, o sea, comprendiendo en él los problemas ontológicos que involucran una confrontación entre los análisis lógicos y los datos genéticos.

§ 59. Interpretación empirista y apriorismo.—Una primera interpretación posible de las matemáticas es la del *empirismo* en sentido tradicional —por oposición al empirismo lógico—: los conceptos lógico-matemáticos se sacarían de la experiencia, ya en el sentido de experiencia física (por abstracción a partir de objetos), ya en el de experiencia psicológica (abstracción a partir de datos introspectivos, es decir, a partir del sujeto, pero en cuanto objeto de introspección, y no como sujeto activo estructurador de los objetos y de su propia consciencia).

Uno de los últimos representantes del empirismo puro fue F. Enriques, que esperaba poder explicar las diversas formas de geometría a partir de distintos teclados sensoriales [1]; pero también se encuentran formas mitigadas de empirismo en autores que por lo demás muestran tendencias harto distintas:

[1] F. ENRIQUES, *Les concepts fondamentaux de la Science*, trad. de Rougier, París (Flammarion).

por ejemplo, en las primeras obras de F. Gonseth, al suponer este profundo autor que se empieza por percibir el número de los objetos como se percibe el color [2], e incluso en L. Brunschvicg, cuando este gran defensor del dinamismo de la inteligencia hablaba de la aritmética como de una disciplina físico-matemática [3].

Sin remontarnos a los representantes clásicos del psicologismo, es evidente, pues, que el recurso a la psicología puede llevar o hacer volver a las seducciones del empirismo; tal es el motivo por el que conviene empezar este capítulo de conclusión recordando por qué razones nos ha convencido el análisis genético de que allí se esconde un malentendido fundamental. Estas razones son tres:

1) Cuando el sujeto, en los estadios iniciales del desarrollo, descubre por experiencia verdades lógico-matemáticas al manipular objetos, tales verdades no se han abstraído de los objetos, sino de las acciones ejercidas sobre ellos, y, por lo tanto, de la actividad del sujeto.

2) Las vinculaciones lógico-matemáticas así inherentes al sujeto no se descubren, por otra parte, mediante experiencias psicológicas, al modo en que éstas permiten captar por introspección ciertas propiedades de la conciencia individual (un dolor, un deseo, etc.): el sujeto las construye a partir de un esquematismo de las coordinaciones generales de la acción que en sí mismo ni es perceptible ni objeto de experiencia directa.

3) Este esquematismo, que es común a todos los sujetos (y, por lo tanto, no presenta los rasgos de la acción individual sola), da lugar, en los niveles inferiores, a una experiencia *sui generis*, o lógico-matemática; pero ésta se limita a comprobar los resultados de unas coordinaciones de acciones que podrían deducirse (y que de hecho lo serán en cuanto las acciones se interioricen en operaciones).

Así pues, a lo largo del desarrollo no se descubre por nin-

---

2 F. GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, París (P. U. F.), página 127.

3 L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, París (P. U. F. [versión castellana: *Las etapas de la filosofía matemática*, Buenos Aires, Lautaro, 1945]).

guna parte una formación de conceptos lógico-matemáticos a partir de la experiencia en el sentido del empirismo, sino que, desde los niveles iniciales, por elementales que sean, se encuentra una actividad constructora o estructurante que informa la experiencia a la vez que se organiza a sí misma.

En cuanto a la forma en que el sujeto adquiere conciencia de sus estructuras, hemos comprobado sin cesar que consiste en una reconstrucción, dado que la «abstracción reflectora», mediante la cual el sujeto descubre las leyes de las coordinaciones de la acción, consiste en proyectar o hacer que sufra una reflexión sobre un nuevo plano lo que se hubiere abstraído de la estructura que había de descubrirse, con lo cual se la reconstituye para utilizarla. Ahora bien, esta reconstrucción es *ipso facto* una construcción nueva, que enriquece la estructura inicial, ya que tal transposición supone unas operaciones para poder efectuarla, y éstas liberan la estructura inicial de su contexto concreto, dando un modelo más general y abstracto. Este mismo proceso permite además, pues, extraer los elementos comunes a diversas estructuras distintas y coordinarlos en estructuras asimismo más generales.

Así pues, la imagen que nos proporciona el análisis genético se aleja del empirismo, para acercarse al *apriorismo,* pero se mantiene a medio camino entre ambos extremos, sin tampoco adherirse a esta segunda perspectiva; y la razón es que, si bien la actividad del sujeto es indudablemente, en cierto sentido, *a priori* con respecto a la experiencia, manifiesta una capacidad de construcción o de estructuración que es enteramente ajena a dos de los caracteres fundamentales admitidos por el apriorismo: el que haya unas estructuras acabadas que sostengan o determinen de antemano todas las construcciones ulteriores, y que se imponga desde el comienzo cierta necesidad.

El apriorismo, cuyas formas históricas son bien conocidas, fue reintroducido en el pensamiento matemático contemporáneo por D. Hilbert, en un estudio bastante breve, pero de gran riqueza, sobre «El conocimiento de la naturaleza y de la lógica»[4]. Hilbert subrayaba allí, ante todo, la «armonía preesta-

---

[4] Aparecido en *L'enseignement mathématique,* tomo 30 (1931), traducción de Müller.

blecida» que, según él, existe entre los esquemas deductivos o formales y los conocimientos experimentales tales como los de la geometría física; ahora bien, si semejante armonía existe, es preciso admitir, «además de la experiencia y de la deducción, una tercera fuente de experiencia y de deducción, una tercera fuente de conocimiento»: el *a priori* kantiano, aunque concebido en un sentido menos amplio que el orginal: «Admito de buena gana que para la construcción de los conjuntos teoréticos que subyacen a todo nuestro conocimiento son necesarias ciertas opiniones *a priori*; y creo que, en último análisis, también los conocimientos matemáticos están fundados en tales opiniones intuitivas, que cierto residuo intuitivo *a priori* es una base necesaria para la teoría de números... Creo que así ha ocurrido, en lo esencial, en mis investigaciones sobre los principios de las matemáticas» (págs. 28-29).

Así pues, el artículo de Hilbert hace ver que si se quiere conservar lo esencial de la hipótesis apriorista, pero aligerándola de todo el aparato de formas y categorías predeterminantes de todo el conocimiento, lo único que se puede hacer es atribuir al *a priori* ciertas intuiciones que se opongan, a la vez, a la experiencia y a la construcción deductiva.

Sin embargo, aun así reducido a su expresión menos comprometedora, creemos que el apriorismo, tal y como lo defiende el protagonista más vigoroso del logicismo, suscita dos dificultades fundamentales cuando se lo compara con los datos genéticos.

La primera es que la armonía entre la experiencia y la deducción se encuentra lejos de estar «preestablecida», esto es, asegurada desde el comienzo: ya en las fases iniciales se constituye cierta armonía, aunque progresivamente; luego la deducción se convierte en ciertos casos en anticipadora de la experiencia, pero este hecho no supone necesariamente un cuadro común anterior, y para explicarlo basta apelar a construcciones paralelas a partir de una fuente común, que es precisamente la progrediente armonía inicial.

En efecto, durante un primer período la armonía entre la experiencia y la deducción sólo se establece progresivamente, puesto que aquélla, que al principio es confusa y global, no se

estructura sino poco a poco bajo el efecto del marco lógico-matemático en formación, y puesto que este marco, a su vez, no se organiza sino poco a poco: pues exige inicialmente, por su parte, cierta forma de experiencia, pero, como acabamos de recordar, abstrayendo a partir de acciones y no a partir de objetos.

Así pues, sólo en una fase adelantada del desarrollo presentan los encuentros entre la experiencia y la deducción el cariz de una anticipación de aquélla bajo la influencia de ésta. Tal es el caso de la geometría euclídea, que la física griega no aplicaba a la experiencia (el espacio de Aristóteles no es isótropo) y que no llegó a formar cuerpo con la física más que en la concepción newtoniana de la gravitación; tal es asimismo el caso de la geometría riemanniana, construida deductivamente mucho antes de que Einstein la aplicase también a la gravitación. La microfísica contemporánea proporciona otros muchos ejemplos de este género.

Pero ¿en qué sentido se puede hablar de armonía preestablecida entre la deducción y la experiencia para explicar el acuerdo de las matemáticas y la realidad? No en el sentido empirista, ya que la razón informa a la experiencia en lugar de derivarse de ella, e incluso la informa, en ocasiones, con sorprendentes anticipaciones; pero tampoco en el sentido del *a priori* kantiano, ni siquiera hilbertiano, puesto que no hay al comienzo marco alguno común a la experiencia y a la razón que contuviese por anticipado las formas desarrolladas luego por ésta y aplicadas a aquélla. Lo que está dado de antemano es una fuente común, de la que provienen dos construcciones inicialmente independientes y luego paralelas, pero de las cuales la segunda toma la delantera; y esta fuente común es, simplemente, la coordinación de las acciones del sujeto. Sólo que, como esta coordinación general depende de las leyes de las coordinaciones nerviosas, y éstas de las de la coordinación orgánica en general, y como los organismos han nacido —sin que aún se sepa cómo— en interacción con el medio fisicoquímico, la fuente común de la razón y de la experiencia supone desde el primer momento una interacción fundamental entre el sujeto (el organismo) y los objetos (el medio). No existe, pues, un marco

a priori que contuviese de antemano todo el desarrollo, sino un punto común de origen a partir del cual se escalona una serie ininterrumpida de construcciones, y luego de reconstrucciones, peldaño a peldaño, de las estructuras esbozadas en las etapas anteriores.

La segunda dificultad del apriorismo hilbertiano la conocemos ya, y procede directamente, por lo demás, de la anterior: consiste en que ese «cierto residuo intuitivo *a priori*» que se encontraría en la base de la teoría de números, etc., no constituye genéticamente una facultad aparte ni un tercer modo de conocimiento que pudiese situarse en el mismo plano que la experiencia o la deducción. Pues, como hemos intentado hacer ver (capítulo 9, § 51), la intuición constituye por sí misma una sucesión ininterrumpida de construcciones, que conduce, entre otras cosas, al montaje de los mecanismos operatorios que, a su vez, se encuentran en la fuente misma de la deducción, incluso la formalizada.

En conclusión: el constructivismo operatorio sugerido por el análisis genético no se reduce ni al empirismo ni al apriorismo, puesto que no cabe extraer de los objetos la inteligencia misma («... *nisi ipse intellectus*») y puesto que el sujeto no posee un marco que contuviese de antemano toda la razón, sino únicamente cierto dinamismo que le permite construir estructuras operatorias. Esta construcción no es arbitraria, ya que el sujeto individual no forma ni su fuente ni siquiera su fiscalizador: el sujeto epistémico —frente a lo que sucede con el psicológico— es lo que tienen de común todos los sujetos, dado que las coordinaciones generales de las acciones conllevan un elemento universal, que es el de la organización biológica misma. Por lo tanto, contrariamente al empirismo físico o psicológico, el constructivismo implica una regulación interna, que se traduce objetivamente por un equilibramiento progresivo de las estructuras de coordinación y subjetivamente por un sistema de normas e incluso de evidencias, si bien elaboradas progresivamente. Y este origen biológico del constructivismo es incapaz de llevar a un empirismo biológico que fuese análogo a los empirismos físico o psicológico, ya que el sujeto no tiene experiencias de este tipo, y no conoce las leyes de coordinación de

sus propias acciones más que por sus resultados; es decir, cuando construye éstos, primeramente mediante una experiencia lógico-matemática profundamente distinta de la del empirismo, y luego deductivamente.

§ 60. La interpretación nominalista o lingüística de las matemáticas.—El lenguaje incluye una lógica, aunque incompleta (clasificaciones, relaciones, algunas operaciones proposicionales, cuantificadores, etc.), y una aritmética, bajo la forma de una sucesión verbal de números naturales y de algunas fracciones. Es comprensible, por lo tanto, que se haya pensado con frecuencia en explicar la lógica por el lenguaje; lo cual conduce a una interpretación nominalista, y a veces convencionalista, de las matemáticas.

El empirismo lógico inaugurado por el Círculo de Viena ha dado un impulso especial a esta interpretación al introducir una distinción radical entre dos clases de verdades: unas, sintéticas o experimentales, que se fundarían en la percepción, y las otras, analíticas, que procederían por puras combinaciones tautológicas a partir de definiciones. Luego, Carnap intentó reducir estas verdades analíticas a una pura sintaxis, aun cuando después ha reconocido, siguiendo a Tarski, la necesidad de introducir una semántica; por el contrario, la obligación de añadir a ello una pragmática, según lo ha sugerido Morris, sigue todavía siendo objeto de debates.

Independientemente de las cuestiones de técnica lógica, sobre las que no tenemos por qué pronunciarnos, la interpretación epistemológica que consiste en asimilar las verdades lógico-matemáticas a una sintaxis general y tautológica completada por una semántica hace inevitable su vinculación con el lenguaje. Desde el punto de vista genético, esta hipótesis estaría justificada si se llegasen a demostrar las dos proposiciones siguientes: a) que gracias al lenguaje es como se constituyen las operaciones y sus estructuras de conjunto, primeramente como concretas (pues el lenguaje acompaña a las manipulaciones de objetos) y, sobre todo, como hipotético-deductivas; b) que la mayoría de las estructuras lógico-matemáticas se adquirirían por transmisión educativa y cultural (acciones ejer-

cidas por la familia y por la escuela, lecturas, etc.), cuyo instrumento esencial es el lenguaje. De estas dos tesis se seguiría la fundamental consecuencia de que las fuentes genéticas de la lógica y las matemáticas no habrían de seguirse buscando en las actividades del sujeto en general, caracterizado por su organización biológica y mental, sino únicamente en las del sujeto colectivo, es decir, en el grupo social y lingüístico.

Desde el punto de vista epistemológico, la asimilación de las operaciones y estructuras lógico-matemáticas a las leyes de una actividad colectiva y lingüística lleva consigo dos interpretaciones posibles y distintas: 1) una interpretación semántica realista, pese al aparente nominalismo de la sintaxis tautológica: los conceptos y sus significaciones constituirían universales colectivos, cuyo valor provendría de la autoridad del grupo social; y tal es el sentido en el que Durkheim defendía frente a Lévy-Bruhl la universalidad de la razón y de la lógica, puesto que bajo las civilizaciones estaría la civilización, con sus leyes permanentes y su función normativa; y 2) una interpretación completamente nominalista, que lleva al convencionalismo, dado que lo propio de las relaciones sociales sería estatuir convenciones. Este convencionalismo se encontraba ya en germen en varios partidarios ortodoxos del Círculo de Viena: P. Frank, por ejemplo, recogía esencialmente el aspecto convencionalista de la obra de H. Poincaré (aspecto que no es el único, ya que este autor creía en los juicios sintéticos *a priori* en lo que respecta a la intuición del número juntamente con la recurrencia, así como en lo referente a la estructura del grupo; pero Frank, como es natural, rechazaba este apriorismo limitado), convencionalismo que en la física matemática afectaba a la índole de los principios, que serían definiciones disfrazadas, y era geométrico en lo que respecta a la elección de las métricas euclídea o no euclídea (aunque no cabe duda de que este convencionalismo geométrico fue lo que impidió a Poincaré descubrir la teoría de la relatividad, de la que se encontraba tan cerca). Mas el convencionalismo que en germen yacía en las tesis del empirismo lógico ha encontrado su *enfant terrible* en la persona de L. Rougier, cuyo «Tratado del conocimiento» reduce toda la

lógica, incluido el principio de no contradicción, a una pura cuestión de convenciones verbales [5].

Se advierte inmediatamente que, lo mismo que ocurría ya con el empirismo puro, y todavía más en el caso del apriorismo, estas interpretaciones socio-lingüísticas de la lógica y de las matemáticas involucran afirmaciones de hechos junto a cuestiones de validez formal. Tales afirmaciones acerca de hechos caen, pues, bajo la fiscalización psicogenética. Ahora bien, estamos en posesión de cuatro conjuntos fundamentales de datos acerca de las relaciones entre las conductas lógico-matemáticas del sujeto y la transmisión socio-lingüística: algunos resultados —poco numerosos, pero sólidos— de psicología animal (Kohts, W. Koehler, O. Köhler, etc), todo el desarrollo del niño normal, los experimentos relativos al aprendizaje de las estructuras lógicas (Gréco, Wohlwill, Morf, etc.) [6] y los concernientes a los sordomudos (P. Oléron, M. Vincent, F. Affolter). Por otra parte, estos cuatro tipos de resultados convergen enteramente y llevan a las conclusiones siguientes:

1) Con anterioridad a todo lenguaje, esto es, en el animal superior y el vástago humano durante los primeros meses, vemos cómo se constituye todo un esquematismo de la acción, esquematismo que incluye coordinación de esquemas, composición de relaciones (por ejemplo, se busca x bajo A si A se encuentra bajo B y x se había colocado debajo de B, pero no es visible al levantar B el sujeto), e incluso reconocimiento de colecciones de acuerdo con su extensión, con tal de que no se pase de los cinco o seis elementos. Así pues, antes del lenguaje se encuentran las raíces de las estructuras de clases, de relaciones y de números.

2) El desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas entre los dos a tres y los once a doce años en el niño normal procede de una interiorización y de una coordinación interiorizada de las acciones por lo menos tanto como de una aplicación de las conexiones lingüísticas. Por ejemplo, un niño de cinco a seis años puede saber contar verbalmente hasta 10 sin poseer la con-

[5] L. ROUGIER, *Traité de la connaissance*, París (Gauthier-Villars).
[6] Cf. los fascículos XII y IX de los «Études d'Épist. génét.».

servación del número y sin que admita que dos cantidades de 5 y de 2+3 objetos son iguales (aun cuando cuente 5 en una y la otra); conservaciones e igualdades a las que llegará al conquistar la reversibilidad operatoria, en la que el lenguaje no desempeña un papel decisivo. Otro ejemplo: pese a los cuantificadores verbales «todos» y algunos», es preciso esperar hasta los siete u ocho años para que el niño, por término medio, admita que «si todos los A son B y si sólo algunos B son A, hay más B que A»; también aquí la comprensión en las acciones de la reversibilidad $A=B—A'$, si es que $A+A'=B$ (y supuesto que $A \times A = 0$), hará más en favor de la solución del problema que los mecanismos verbales; y en el plano del lenguaje solo, es preciso, con frecuencia, esperar a los nueve o diez años para que se distinga entre expresiones como «algunas de las flores que tengo son amarillas» y «todas las flores que tengo son amarillas» (expresiones ambas que se comprenden hasta entonces como si significasen «tengo algunas flores, y todas ellas son amarillas»).

3) Los experimentos sobre el aprendizaje de las estructuras lógicas (por ejemplo, sobre la cuantificación de la inclusión, de que acabamos de hablar, o sobre la conservación de un conjunto numérico, etc.) muestran que ni el lenguaje ni, por lo demás, las meras comprobaciones empíricas bastan para constituir en el espíritu del niño una estructura que no posea todavía: el único método que tiene éxito es el de partir de una estructura más débil ya existente y llevar a su generalización mediante una abstracción reflectora provocada. Dicho en general, es patente que los aprendizajes escolares, familiares, etc., logran ciertos resultados, pero únicamente en la medida en que el niño sea capaz de asimilar lo que se le transmita, sin que le sea posible conseguir tal asimilación sino por medio de instrumentos asimiladores, que son las estructuras previas no aprendidas o no aprendidas enteramente; y si éstas han sido en parte aprendidas, se las habrá comprendido únicamente merced a unas estructuras previas no aprendidas o no enteramente aprendidas, y así sucesivamente. La transmisión social y lingüística, pues, no se inscribe sobre una «tabla rasa», como tampoco sucede con lo registrado empíricamente (pese al empirismo).

4) Los experimentos con sordomudos no contradicen la hi-

pótesis de que la «función simbólica» sea necesaria para construir el pensamiento representativo, y, por lo tanto, para la interiorización de las acciones en operaciones, ya que el sordomudo posee dicha función (lenguaje de gestos, juegos simbólicos, etcétera). Pero ni el lenguaje articulado ni la transmisión sociolingüística son necesarios para la formación de las estructuras operatorias elementales, ya que el sordomudo es capaz de efectuar seriaciones, clasificaciones, correspondencias numéricas, etcétera.

5) En conclusión: indudablemente, el lenguaje constituye una condición necesaria para que se completen las estructuras de cierto nivel (hipotético-deductivas y proposicionales), pero no es condición suficiente de ninguna construcción operatoria. Por lo demás, lo mismo que la comprensión del lenguaje supone la inteligencia y su mecanismo operatorio, la formación misma del lenguaje, de la cual, por desdicha, sabemos tan poco, sería incomprensible sin una inteligencia previa.

Desde un punto de vista genético, la interpretación sociolingüística de las estructuras lógico-matemáticas es, por lo tanto, resueltamente insuficiente: no cabe duda de que hace hincapié en un factor necesario, pero jamás se ha demostrado que sea suficiente, puesto que semejante hipótesis estaría en contradicción con todo lo que sabemos acerca de las fuentes sensorio-motrices de las operaciones, y, por consiguiente, de la necesidad de remontarse a las coordinaciones generales de la acción, cuya universalidad se refleja incluso en el lenguaje mismo.

En cuanto a las interpretaciones nominalistas que pudieran defenderse con independencia de esta frágil base genética, tropiezan, a nuestro juicio, con una dificultad fundamental: la de que, gracias precisamente al lenguaje (cuyo papel no hemos negado, en absoluto, sino solamente limitado), la coordinación general de las acciones cesa de ser únicamente intrapersonal, como lo era en el animal o el niño muy pequeño, para convertirse en interpersonal y contribuir a una objetividad de que es incapaz el individuo solo, por lo menos a cierta escala. Es cierto que la vida social se manifiesta también de maneras muy otras que por las coordinaciones que garantizan la objetividad,

pues la coacción del grupo es fuente de una subjetividad colectiva que se manifiesta en opiniones recibidas, creencias, etc., tan poco fundadas como la subjetividad individual. Pero la coordinación misma de las acciones interpersonales, es decir, la cooperación (frente a las coacciones de la opinión) constituye, de hecho, un sistema de operaciones efectuadas en común o en cooperación; y, según hemos hecho notar ya antes, se trata de las mismas operaciones que entran en la coordinación intraindividual (reuniones, interferencias, correspondencias, reciprocidades, etc.), puesto que la comunicación no es otra cosa que un poner en correspondencia operaciones individuales, correspondencia que es también una operación, y el debate no es más que una serie de disociaciones, reuniones, etc., o de reciprocidades. Ahora bien, estas operaciones en común involucran una fiscalización mutua superior a la autofiscalización, por lo cual las leyes de la coordinación se convierten en leyes normativas que regulan los intercambios; y de ahí el carácter de moral del pensar que reviste la lógica en su aspecto colectivo. A nuestro entender, este carácter normativo de la cooperación sería lo que impide que del aspecto sociolingüístico de las estructuras lógico-matemáticas se saque una interpretación de estas estructuras estrictamente nominalista, ya que lo que se impone normativamente contiene algo más que un sistema de *flatus vocis*.

En lo que se refiere al convencionalismo integral de L. Rougier, se ha reparado frecuentemente en que el término de convención pierde todo sentido si no hay elección posible. Ahora bien, si el principio formal de no contradicción no pasase de ser convencional, difícilmente se podría explicar la existencia de unas formas concretas (e incluso sensorio-motrices) de coherencia que constituyen un bosquejo de la no contradicción: no se ve fácilmente, por ejemplo, cómo podría asegurarse la subsistencia un ser vivo si la búsqueda del alimento involucrase movimientos incompatibles o contrarios; por consiguiente, si no hubiese a todos los niveles unas coordinaciones que conllevan una forma, todo lo rudimentaria que se quiera, de la no contradicción, hace mucho tiempo que la vida habría desaparecido de la superficie del globo, y no habría epistemólogos para defender el convencionalismo.

§ 61. La interpretación platonista de las matemáticas.— La gran fuerza del platonismo reside en que suprime el difícil problema de la construcción creadora, esto es, del paso de estructuras pobres a otras más ricas. Sostener —con el B. Russell de la primera época— que América existía antes de Cristóbal Colón es una idea clara, y tal vez seamos incapaces de no ser seducidos, al menos periódicamente, por la hipótesis de que lo mismo ocurre con los entes lógico-matemáticos: el espíritu los descubriría, en lugar de tener que inventarlos.

Además, este realismo corresponde a un ideal profundo de los matemáticos, ideal felizmente bautizado por P. Boutroux como el de la «objetividad intrínseca». En su hermoso libro sobre «El ideal científico de los matemáticos», este autor distingue, en efecto, tres períodos de la historia de las matemáticas: el «ideal contemplativo», que es el de los griegos y corresponde al platonismo original; luego un «ideal sintetista», con los comienzos del álgebra occidental, de la geometría analítica y del análisis, comienzos en los que el inventor tenía la impresión de construir casi a voluntad y de dirigir sus propias operaciones; y, por fin, el ideal de objetividad intrínseca, que se inició con el siglo XIX, y en el que, ante estructuras cada vez más ricas y complejas, el inventor ya no tiene conciencia de construir, sino de descubrir, e incluso casi de elegir dentro de un mundo ilimitado de sistemas, cada uno con sus leyes propias y que se resisten en caso de que el tratamiento sea artificial.

Lo malo es que la hermosa sencillez del platonismo se paga, pues aparecen tres clases de dificultades.

La primera es que al hacer corresponder las matemáticas a unos entes independientes nos vemos llevados a una visión estática del conjunto de tales seres, ya que si se construyeran de forma indefinida fuera de nosotros se plantearía un problema de duración objetiva: se comprende que las construcciones humanas requieran tiempo, pero no se puede comprender que lo mismo suceda con una creación exterior siempre inacabada. Y, por otra parte, no estamos seguros de que un mundo acabado de todos los entes lógico-matemáticos no suscite dificultades insuperables: en particular, para algunas personas una actualización del infinito potencial es incomprensible; así, cuando

Denjoy hace corresponder la intuición de lo transfinito a la manera que tiene Aquiles de alcanzar la tortuga, saltando por encima de la serie $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ para llegar al primer número situado más allá de ella, no se experimenta dificultad alguna al seguirle si los tres puntos suspensivos $(+ \dots)$ expresan un acto del sujeto capaz de repetirse ilimitadamente, pero no se le comprende si es que *todos* los términos de la serie han de existir actualmente.

La segunda dificultad es que no se comprende de qué manera se lleva a cabo el contacto entre el sujeto y los entes ideales. En el caso de los seres sensibles, se concibe —de un modo aproximado, pero sin que ofrezca misterio alguno fundamental— que un objeto exterior pueda actuar sobre los órganos de los sentidos y ser aprehendido por un esquematismo asimilador propio de la percepción; es cierto que no se consigue, en modo alguno, trazar una frontera exacta entre los mensajes del objeto y la labor de interpretación perceptiva o de descifrado del sujeto (y acaso no haya frontera, sino un continuo de interacciones), pero, por lo menos, se sabe que hay un objeto —e incluso en el solipsismo hay que hacer la distinción entre una percepción normal y una alucinación—. Ahora bien, en el caso de los entes ideales, el único contacto conocido entre seres tales como 1, 2, 3, ... (o bien *alef* ó, o $p \supset q$, etc.) y el sujeto consiste en un acto de éste consistente en reconstruirlos deductivamente. El decir que se tiene intuición de ellos no es otra respuesta distinta (pues la intuición es siempre una construcción), si bien únicamente menos precisa o más simbólica; y además, la forma que tiene el sujeto platonizante de descubrir los seres ideales para entrar en contacto con ellos no se diferencia en nada de la del sujeto no platonizante que cree inventar y no descubrir, ni tan siquiera de la de sujetos tales como Lichnerovicz, que, al inventar, tienen la impresión de estar creando algo análogo a una obra de arte: todas estas construcciones del sujeto se efectúan en el mismo orden de sucesión, con el mismo trabajo y con idénticos tanteos, se crea o no se crea en los entes ideales. No cabe duda que el platonismo se impondría a todas las inteligencias si un día un sujeto excepcional «viese» y describiese con detalle unos seres ideales que ni él ni sus contempo-

ráneos fuesen capaces de comprender, y si sus «visiones», debidamente recogidas y protocolizadas, diesen lugar cincuenta o cien años más tarde a unos trabajos explicativos que desvelasen todo su sentido. Pero jamás ha ocurrido nada de esto; así, cuando G. Cantor experimentó ciertas intuiciones anticipadoras acerca de la potencia del continuo, sin llegar a las demostraciones que quería, se limitó a una generalización hipotética de sus construcciones anteriores, sin proporcionar prueba alguna de la autenticidad de una intuición propiamente platónica (véase más arriba, en el capítulo 4, § 30, lo que dice Beth de las intuiciones cantorianas).

La tercera dificultad del platonismo es consecuencia de las anteriores. Una regla general de la demostración matemática es que la mejor demostración es la que extrae las conclusiones más fuertes de los mínimos presupuestos: toda la axiomática consiste en una determinación de las condiciones *necesarias y suficientes* para demostrar las teorías, en tanto que si se multiplican los axiomas de modo innecesario se desconoce el interés principal de este método; actitud que es todavía más general en las ciencias experimentales, en las que tiene su paralelo en la famosa navaja de Occam: sacrifíquese toda hipótesis inútil. Así pues, no hay razón alguna para que no utilicemos en epistemología un método comparable a la vez al de las ciencias deductivas y al de las experimentales; y la cuestión reside ahora en averiguar si la hipótesis de la existencia de los entes ideales es *necesaria* para explicar algún rasgo de las estructuras matemáticas, o si la referencia a las actividades del sujeto es *suficiente* para evitar el recurrir a seres exteriores.

Ahora bien, las dos ventajas del platonismo son: a) dar cuenta de la resistencia objetiva de las vinculaciones lógico-matemáticas, y b) prescindir de la construcción creadora. Por lo tanto, las cuestiones que nos ocupan son: a) averiguar si la hipótesis es necesaria para explicar tal resistencia de las estructuras, y b) si se puede prescindir de la idea de construcción o si ésta es un hecho, en cuyo caso la hipótesis de la actividad del sujeto sería, a su vez, necesaria y suficiente.

a) En lo que se refiere a la resistencia de las estructuras, o a lo que P. Boutroux llamaba su «objetividad intrínseca», el

platonismo no es indispensable más que en la medida en que ni los seres físicos ni la actividad del sujeto basten para dar cuenta de esta peculiar objetividad. En lo referente a los seres físicos, la causa está sentenciada, ya que no pueden originar más que una objetividad extrínseca o de naturaleza inductiva; y en lo que respecta a la interpretación fundada sobre las actividades del sujeto, el equívoco fundamental que permite a sus adversarios vencerla tan fácilmente consiste en confundir las actividades del sujeto individual, que son libres en cuanto a sus combinaciones y, por ello, relativamente arbitrarias, con las coordinaciones generales de las acciones y las operaciones, coordinaciones comunes a todos los sujetos y, por consiguiente, tan «resistentes» e «intrínsecamente objetivas» como si fuesen seres exteriores al sujeto, ya que precisamente tales coordinaciones no dependen de la voluntad arbitraria del sujeto individual.

A este respecto los tres períodos históricos señalados por P. Boutroux se explican muy claramente por la psicología de las operaciones sin más que apoyarse en las leyes de la toma de conciencia, que sigue un proceso centrípeto, y no centrífugo, es decir, que empieza por la conciencia del resultado exterior de las operaciones antes de captarlas como tales y, sobre todo, antes de remontarse a sus estructuras internas. El carácter «contemplativo» propio de las matemáticas griegas no es otra cosa que la expresión de semejante falta de conciencia de las operaciones: por ello colocaba Pitágoras el número entre las cosas de la misma manera que las sociedades primitivas proyectan los nombres en los objetos, o que Euclides omitía tener en cuenta los desplazamientos como operaciones geométricas, por más que se valiese de ellos constantemente. El período «sintetista» es el de la toma de conciencia histórica de las operaciones (correlativa de la toma de conciencia del sujeto epistémico con el *cogito*). En cuanto al período de la «objetividad intrínseca», no se constituye sino en tercer lugar, pues el sujeto no descubre el rasgo más profundo de las operaciones más que al final de una larga serie de abstracciones reflectoras (esto es, el rasgo de ser solidarias entre sí en estructuras que presentan sus propias leyes de totalidad). Tal es la razón por la que

ha sido preciso esperar a E. Galois para descubrir el concepto de grupo, que Vieta y Descartes empleaban ya en su álgebra inconscientemente.

En total, la principal ventaja del platonismo, que consiste en dar cuenta de la resistencia objetiva de los entes y las estructuras lógico-matemáticas, se garantiza con igual seguridad mediante el concepto de la coordinación general e interna de las acciones y operaciones. Por lo tanto, la hipótesis de la exterioridad de los entes ideales no es necesaria para asegurar la independencia de aquellas estructuras con respecto a la arbitraria voluntad de los sujetos individuales.

b) En cuanto a la idea de construcción [7], bástenos reconocer, por el momento, que corresponde a un hecho existente independientemente de su interpretación (sobre la que volveremos en el parágrafo siguiente), pues la hipótesis platonizante lo que pone en tela de juicio es, justamente, tal existencia. A este respecto los ejemplos más triviales son los más convincentes, ya que no estriban en el ingenio creador de inventor alguno, sino en las leyes generales de la construcción colectiva. Así, es obvio que la sucesión de los números naturales no contiene de antemano los números negativos, los fraccionarios ni los imaginarios; y, sin embargo, basta generalizar la resta para obtener los primeros, la división para llegar a los segundos y la extracción de la raíz para los últimos. Ahora bien, la suma opera implícitamente en la serie de los números naturales, y la resta es la misma operación, aunque invertida; etc., etc.; entonces hay que elegir entre dos posibilidades: o bien todos los números existen de antemano, y la «operación» no es más que un concepto «esencialmente antropomórfico», como decía Couturat, o las operaciones actúan desde el momento en que se construyen los números naturales, y lo que engendra las demás variedades numéricas son sus generalizaciones surgidas de abstracciones reflectoras. Pero, por antropomórfica que se quiera considerar la operación, corresponde como mínimo a unas

---

[7] Es obvio que tomamos aquí el término de construcción en su sentido genético o general, que es el de producir o reconstituir un objeto del pensamiento, y no en su sentido especial matemático, o sea, el de especificar un objeto cuya existencia esté garantizada por axiomas; véase la nota 9, un poco más abajo.

relaciones [8], que, además, están dadas implícitamente con los enteros naturales; de suerte que sólo habría que extraerlas. Entonces la alternativa es la siguiente: o todos los números están dados, y no hay que hacer otra cosa que reconstituirlos, o todos se construyen por abstracción y generalización a partir de un núcleo operativo que actúa ya en la coordinación de las acciones más elementales. Indudablemente, no es una alternativa que sea posible zanjar por vía especulativa; pero, a falta de otras informaciones, nos contentaremos con sostener, *more mathematico*, que la primera opción es demasiado «fuerte», ya que basta la segunda: en ambos casos se *requiere* una construcción, ya sea para extraer lo que ya existiese, pero todavía no advertido, ya para construir efectivamente; y el supuesto de esta segunda construcción es *suficiente*, dado que permite, sin necesidad de ninguna otra hipótesis completaria, sacar todo de un punto de partida mínimo, en lugar de conferir retroactivamente existencia exterior a unos entes numéricos a los que no se conocía antes de haberlos construido [9]. En resumen, la existencia de los entes ideales en sentido platonis-

---

[8] Así, para Couturat, $2 \pm 3 = 5$ no es más que una relación entre 2, 3 y 5.

[9] En el capítulo sobre «nominalismo» de su hermoso libro *The Foundations of Mathematics*, E. W. Beth se ocupa del problema de la construcción, pero en el sentido matemático del término (especificación de objetos cuya existencia esté garantizada por medio de axiomas), y no en el genético (producción del objeto), que es el que empleamos aquí; y recuerda que si quiere uno someterse a las limitaciones de la construcción en sentido restringido (interpretando figuradamente los axiomas), no se consiguen reconstituir las matemáticas clásicas: según ha mostrado Gödel, hacen falta entonces unos artificios suplementarios para lograrlo, sin los cuales no se obtiene más que un subsistema de aquellas matemáticas, comparable a la matemática de Lorenzen. Pero el problema de que tratamos aquí es otro, ya que tomamos el término de construcción en el sentido de producción de objeto. Y sin que tengamos por qué ocuparnos del concepto matemático de construcción, a cuyo respecto carecemos de competencia, nos limitamos a sostener que cabe interpretar epistemológicamente de dos maneras, ya sea como aprehensión de una realidad matemática dada o como construcción en sentido genético, incluso una deducción clásica correspondiente a una interpretación literal de los axiomas (y, por consiguiente, ajena a la construcción en el limitativo sentido matemático); en este caso, la diferencia es la siguiente: en la interpretación platonista, los axiomas consisten en una aprehensión directa de unas realidades exteriores a nosotros (rama «fuerte» de nuestra alternativa); mientras que en la interpretación constructivista (en sentido genético) se construyen los axio-

ta es, indudablemente, tan irrefutable como indemostrable, pero inútil, en el sentido preciso en que son inútiles para una demostración unos axiomas demasiado fuertes cuando bastan otros más débiles.

§ 62. **La interpretación de las matemáticas por las leyes de la coordinación general de las acciones.**—Sin duda alguna, las condiciones necesarias que ha de cumplir una interpretación de las matemáticas para que se la pueda considerar suficiente —si bien no en sí (cosa que supondría la construcción de una «gran lógica»), sino comparada con las ventajas que ofrezcan las demás interpretaciones— son las siguientes: I) dar cuenta de la autonomía de las matemáticas con respecto a la experiencia física y al sujeto psicológico; II) dar razón de la resistencia u «objetividad intrínseca», de los entes matemáticos, y III) en caso de construcción progresiva (frente a la hipótesis de que todo esté determinado de antemano), explicar cómo es posible conciliar tal construcción con el rigor.

I. Por lo que se refiere a la autonomía de las matemáticas, no vamos a repetir lo ya dicho en el capítulo 10 acerca de la explicación psicológica de la posibilidad de la matemática pura. Unicamente recordaremos que si las operaciones lógico-matemáticas se constituyen por abstracción a partir del esquematismo de las acciones (un esquematismo que involucra a todos los niveles ciertos sistemas de encajamientos, relaciones, orden, etc.), esta hipótesis equivale a evitar toda heteronomía (que aparecería si se invocasen la experiencia física o las presiones sociales), así como toda anomía (que se presentaría al invocar

mas mismos, por provenir de una abstracción reflectora a partir de las coordinaciones operatorias, con lo que la totalidad de la deducción es constructiva, lo mismo si conserva el aspecto clásico que si se subordina a la idea de construcción en el sentido restringido del término. Tal es la razón por la que sostenemos que, de hecho, incluso el platonista tiene necesidad de construir (en sentido genético), ya que no se sabe —o no se sabe todavía— de ninguna facultad particular que permita llegar hasta unos seres ideales independientes de nosotros; de modo que, cuando se cree captarlos, ello sucede tras un trabajo mental, cuya índole —hasta que dispongamos de mayores informes— parece ser siempre constructiva (en el sentido genético del término, y no en el matemático).

las construcciones libres de los sujetos individuales, o su sola experiencia introspectiva). Pues el concepto de autonomía implica la existencia de leyes, pero intrínsecas; e invocar a este respecto la coordinación general de las acciones como punto de partida de las estructuras lógico-matemáticas constituye una garantía de autonomía ni más ni menos sólida que la de recurrir a la sintaxis o la semántica lingüísticas, aun cuando es, en realidad, una fuente más profunda, de la que se derivan las mismas coordinaciones lingüísticas.

Pero en este caso —igual que sucede, por lo demás, en el de las estructuras lingüísticas— se trata de un simple punto de partida, que tiene a su vez una historia (que se remonta a las leyes de la organización biológica) y que necesita una sucesión de abstracciones y de generalizaciones constructivas para llegar a unas estructuras lógico-matemáticas propiamente dichas, que se impongan a la conciencia del sujeto como algo necesario. La interpretación de que nos estamos ocupando, pues, equivale a la intervención de un factor del desarrollo mental, y éste es el punto sobre el que hay que preguntarse si las garantías de autonomía son suficientes, aun cuando tal desarrollo se reduzca, en este caso particular, a los procesos de abstracción reflectora que conducen de las estructuras sensoriomotrices a las operaciones lógico-matemáticas «concretas», y luego a las hipotético-deductivas.

Hemos visto (capítulo 9, § 47) que el desarrollo mental no puede apoyarse más que en cuatro factores posibles: una determinación hereditaria interna (maduración), el papel de la experiencia, la transmisión social y los efectos de equilibramiento. En el caso del paso de las coordinaciones generales de la acción a las operaciones conscientes del sujeto por abstracción reflectora y reconstrucción en el plano del pensamiento, no cabe que el desarrollo esté determinado por vía exclusivamente innata, y el papel de los factores de maduración, aun cuando no puede dejarse de lado, tiene que ser débil, ya que el ejercicio o experiencia adquirida y la transmisión social son capaces de acelerar notablemente las estructuraciones. Pero la experiencia que entra en juego en el desarrollo (como ya hemos visto en el capítulo 10, § 52, apartado II), no es una experien-

cia física, sino que se presenta bajo una forma específicamente lógico-matemática; en cuanto a las influencias sociales, no se ejercen sino a condición de que las estructuras del sujeto las asimilen. Así pues, el factor preponderante en este desarrollo es el del equilibramiento, cuyo carácter específico consiste en que las actividades del sujeto tendentes a compensar las perturbaciones exteriores regulan cada vez mejor las coordinaciones; ahora bien, estas crecientes compensaciones se traducen, en la conciencia del sujeto, en el fundamental rasgo de la reversibilidad, el cual, cuando se atribuye a las acciones interiorizadas, las transforma en operaciones. Por lo tanto, la formación de esta reversibilidad se explica por un juego de fiscalizaciones secuenciales de probabilidad creciente; tal es la manera en que hemos intentado dar cuenta de la elaboración de las estructuras operatorias, así como de los conceptos de conservación que constituyen los invariantes correspondientes [10]. De este modo se ve que, bajo sus diferentes aspectos, el paso de las estructuras sensorio-motrices a las operatorias estriba en procesos esencialmente internos, o sea, capaces de garantizar la autonomía de las sucesivas construcciones.

En cuanto a las coordinaciones sensorio-motrices generales, sobre las que, por hipótesis, se apoyan aquellas construcciones, que sacan de ellas sus elementos mediante una abstracción reflectora, dan lugar a análogas consideraciones, especialmente en lo que concierne a su equilibramiento interno. Pero es obvio que cuanto más elementales sean más dependerán de factores innatos; por lo cual el problema de su formación retrocede del plano psicológico a los dominios de la biología. Unicamente hay que advertir que también aquí, por probable que sea el papel de las interacciones con el medio en toda formación orgánica (pese a las tendencias de la biología contemporánea), no es menos cierto que los factores de organización interna conservan una importancia preponderante, lo cual sigue asegurando una autonomía suficiente a las estructuraciones fundamentales de donde proceden las coordinaciones generales de la acción.

---

10 Véase *Logique et équilibre*, vol. II de los «Études d'Épistémologie génétique», estudio II.

Vemos así también que, sin dar en un apriorismo en el sentido tradicional de una preformación de los conocimientos en formas que los contendrían de antemano, el constructivismo al que nos ha conducido el análisis genético está cercano a él en cierto sentido, ya que toda construcción nueva saca sus elementos de una construcción anteriormente efectuada en un escalón inferior, y así sucesivamente; pero sin que esta regresión sin fin proceda de un vicio del sistema, sino únicamente de las incógnitas actuales de la morfogénesis biológica. En efecto, la vida misma es ante todo «creadora de formas», como ha dicho Brachet, y es preciso añadir que tal morfogénesis es matematizante; y si se objeta a esto que el cristal posee una forma geométrica tanto como la madrépora, que los cuerpos físicos son todavía más fácilmente matematizables que los seres vivos y que éstos no son acaso más que matematizables, y no matematizantes, conviene recordar, sin embargo, que mientras no se pruebe lo contrario, los cuerpos físicos son objetos, y no sujetos, en tanto que los seres vivos son ya sujetos, por inconscientes que sean (si es que lo son), y que de ellos descienden los sujetos humanos, incluidos los matemáticos. Por lo tanto, nuestra hipótesis equivale, sin más, a suponer que existen estructuras elementales comunes a todos los seres vivos, y que la creación de formas por la inteligencia prolonga la morfogénesis orgánica. Si esta hipótesis está fundada —y, por lo menos, tiene tanta probabilidad como la de la existencia de los entes ideales—, tenemos en ella un punto de partida aceptable para dar cuenta de la autonomía de las construcciones lógico-matemáticas, punto de partida mucho más general que el socio-lingüístico (el cual, por lo demás, plantea exactamente los mismos problemas desde el punto de vista genético).

II. Sin remontarnos ahora a la morfogénesis orgánica, y ateniéndonos a las coordinaciones más generales de las acciones humanas, sostenemos que su esquematismo conlleva su necesidad interna, e impone leyes estructurales de tal manera que todo sujeto individual ha de plegarse a su generalidad. El que no se adquiera conciencia de esta especie de lógica de la acción, a la vez que se advierta mucho más la del lenguaje, es cosa que concuerda con las leyes de la toma de conciencia: nos

interesamos por los resultados exteriores de la acción, y no por su mecanismo, mientras que, como el lenguaje sirve para el debate, se adquiere obligadamente conciencia de ciertas reglas, en la medida en que lo exijan los debates. Ahora bien, no habría dificultad alguna en simbolizar las diversas vinculaciones que involucran las conexiones entre las partes de una acción, o entre varias acciones, de la misma forma en que McCulloch ha utilizado los símbolos proposicionales (∀, ., ⊃, |, etc.) para describir los diversos tipos de conexiones nerviosas; así se descubrirían incluso vinculaciones propiamente analíticas: por ejemplo, que es necesario recurrir a ciertos medios para conseguir un fin que los exija, etc.; y también se comprobaría que existen clases de medios conducentes al mismo fin, clases de fines distintos alcanzables con los mismos medios, etc. (por no hablar de las innumerables relaciones de todo tipo empleadas en las acciones). Dicho brevemente, se podría describir todo un esquematismo de clases, de orden, etc., juntamente con sus estructuras, de variada complejidad. Si semejante análisis no ofrece mucho interés a partir de cierto nivel del desarrollo, ello se debe a que la acción está entonces dirigida por el pensamiento, y que se hace difícil disociar el esquematismo de la acción misma del de las representaciones dirigidas o del correspondiente al lenguaje en cuanto tal; pero cuando se estudia al niño pequeño antes de adquirir el lenguaje, el seguir la constitución de este esquematismo tiene, por el contrario, gran interés; y entonces se da uno cuenta del hecho de que no hay dos cosas, por un lado las acciones y por el otro la inteligencia, que las dirigiría como luego lo hará el pensamiento conceptual y verbal, sino que esta inteligencia tiene precisamente, como instrumentos únicos, las acciones (en su doble aspecto motor y perceptivo), y que la «inteligencia sensorio-motriz» no es más que la coordinación de tales acciones. No hay que extrañarse, pues, de que semejante coordinación conlleve un esquematismo muy desarrollado, del cual sólo una parte proviene de los mecanismos innatos, y la otra se adquiere por equilibramientos sucesivos.

Como las primeras operaciones lógicas del pensamiento espontáneo se elaboran por abstracción reflectora a partir de

este esquematismo, es patente que el problema de la resistencia u objetividad intrínseca de los entes matemáticos adquiere una solución por lo menos igual de aceptable si se apoya uno en este esquematismo de las coordinaciones generales de la acción que si se lo hace estribar sobre el lenguaje, con todo lo que lleva en sí de convenciones sociales. Como ya hemos hecho notar en el § 60, de esta forma se evitan las desviaciones nominalistas y convencionalistas que la interpretación sociolingüística corre el riesgo de sufrir; pero, sobre todo, se llega a un punto de partida de las construcciones reflexivas mucho más general que el verbal: si, por ejemplo, se piensa en la asombrosa generalidad de las relaciones de orden en las actividades prácticas de todos los niveles (ya que incluso los reflejos más elementales de las especies animales ínfimas implican un despliegue ordenado), se comprueba inmediatamente que semejante punto de partida, con el que se explica la construcción de las estructuras de orden por abstracciones reflectoras sucesivas, es al mismo tiempo más resistente y más general que el lingüístico, ya que, si bien existe, incuestionablemente, un orden en el lenguaje, también actúa a todos los niveles de la conducta humana, y ésta depende, a su vez, de organizaciones biológicas todavía mucho más primitivas.

III. Aun cuando, al hacer retroceder así indefinidamente el punto de partida de las construcciones lógico-matemáticas, nos encontramos, sin duda alguna, en mucha mejor situación para dar cuenta de su resistencia y de su objetividad peculiar, hemos hecho por ello mismo, en cambio, mucho más agudo el problema propio de todo constructivismo: el de explicar la construcción misma, y hacerlo de manera tal que su rigor no se encuentre amenazado. En efecto, la abstracción reflectora, a la que hemos apelado constantemente para dar razón del paso de una construcción de un nivel a su generalización en un nivel posterior, no justifica más que cierta continuidad en tales pasos, en el sentido de que toda construcción nueva exige una reconstrucción previa de aquella otra sobre la que se hubiera fundado para generalizarla. Pero el problema central es, entonces, el de la novedad, sin la cual se llegaría al absurdo de querer que en las coordinaciones de las acciones, e incluso

en las de los animales inferiores, estuvieran contenidas de antemano todas las matemáticas en estado de preformación, de la misma manera que los embriólogos preformistas creían descubrir un *homunculus* en los espermatozoides o los óvulos; pero con un suplemento aún de absurdez, la de que las matemáticas comprenden lo infinito, y sin duda alguna, jamás llegarán a estar acabadas.

Ahora bien, hemos entrevisto antes (en el capítulo 9, § 50) que las novedades propias de una construcción no efectuada hasta el momento no entran, hablando con propiedad, ni en el dominio de los descubrimientos, ya que hay efectiva novedad, ni en el de las invenciones, puesto que las nuevas combinaciones no eran libres, sino que se encontraban dentro de un marco de posibilidades determinadas por la estructura de la que hubiese partido la abstracción reflectora. ¿Podemos, entonces, limitarnos a decir que toda estructura, por elemental que sea, con tal de que posea una índole lógico-matemática (esto es, que sea operatoria o preoperatoria, pero pura —o purificable— de toda adherencia a objetos o a acciones propias del sujeto individual, frente a lo que sucede con las coordinaciones generales), lleva en sí un conjunto de desarrollos posibles, y que la novedad de las construcciones ulteriores consiste, simplemente, en actualizar algunos de ellos? Tal es precisamente nuestra hipótesis, que, como puede verse, no difiere en todos los puntos de la del platonismo, ya que para ser platónico bastaría con otorgar existencia a todas esas posibilidades, o incluso con suponer una inteligencia infinita (o, al menos, superior) que las abarcase todas en una intuición simultánea. Pero aquello a que nos negamos, justamente por motivos genéticos, es a semejante paso de lo posible al ser mientras no se haya producido una actualización en virtud de una construcción efectiva; cada cual es libre de creer en una inteligencia superior que efectuase tal actualización en bloque, pero lo que la distinguiría sería, precisamente, ese disponer de operaciones suplementarias, condensadas o no en actos intuitivos instantáneos. Por consiguiente, creer en la existencia de posibles bajo la forma de seres ideales platónicos es conceder de antemano unas operaciones capaces de actualizar los posibles, pero antes de cono-

cerlas ni a ellas ni a estos últimos. Por el contrario, una vez que se han distinguido los entes que se hayan construido y los posibles, que todavía no lo están, no hay nada que impida suponer: a) que toda construcción es nueva en la medida en que actualice por lo menos una de las posibilidades abiertas por la estructura de partida, y b) que tal novedad es susceptible de rigor, en la medida en que se demuestre luego que la posibilidad así actualizada estaba determinada, por ser coherente con la estructura real que la haya engendrado.

Antes de que intentemos precisar cómo se actualiza una posibilidad abierta por una estructura, hagamos todavía una observación (que, por lo demás, recogemos en otro estudio [11]). La física incorpora en sus cálculos, en ciertos casos, la noción de lo posible, por ejemplo, en el famoso principio de las velocidades virtuales; pero en tales casos lo posible es relativo a la inteligencia del teorizador que prevé transformaciones posibles (así, se dice que un cuerpo está en equilibrio cuando la suma algebráica de los trabajos virtuales compatibles con las ligaduras del sistema es nula), sin que afecte al objeto en cuanto tal (al cuerpo en equilibrio, que no está sometido, justamente, a ninguna de esas transformaciones virtuales). En el terreno mental, en cambio, en el que las estructuras que entran en juego forman parte de la inteligencia del sujeto, lo real (las estructuras construidas) y lo posible (sus implicaciones o transformaciones no actualizadas) son más homogéneos, y el pensar hipotético-deductivo consiste precisamente en introducir vínculos necesarios entre posibles simplemente concebidos, antes de ser reconocidos. Así pues, psicológicamente existe cierta causalidad de lo posible, en el sentido de que, una vez dada esta estructura, la investigación se orienta en función de las posibilidades que abra y, además, en la dirección de las más probables.

Dicho esto, reparemos en que toda estructura abre posibilidades en tres sentidos distintos: 1) Puede conllevar una serie de consecuencias internas no advertidas inicialmente; en este caso, las operaciones del sistema bastarán para extraerlas, o

[11] INHELDER y PIAGET, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, París (P. U. F.).

bien lo harán unas combinaciones nuevas entre operaciones comprendidas en el sistema (por ejemplo: el paso de las operaciones binarias a las ternarias, etc., en la lógica de proposiciones, merced a las nuevas combinaciones que permiten obtener las 256 ternarias, etc.); 2) puede dar lugar a transformaciones por modificación de uno de los rasgos de la estructura (por ejemplo, suprimiendo la conmutatividad); y, por fin, 3) puede quedar «inmersa» en una estructura más amplia en calidad de caso particular, de modo que adquiera nuevas propiedades procedentes de esta estructura ampliada.

Pero lo esencial es que en los tres casos se necesitan operaciones nuevas para actualizar lo posible; por lo cual cabe puntualizar la posición propuesta precisamente en lo que respecta a tales operaciones. Estas son nuevas en el sentido de que no pertenecían a la estructura de partida, o bien en el de que no se las utilizaba, por lo que se las habrá introducido como realidades no actualizadas hasta el momento; pero en la medida en que quepa demostrar su validez entran retroactivamente en el sistema de las posibilidades abiertas por la estructura sobre la que se haya ejercido la abstracción reflectora. En efecto: por definición, no cabrá conocer tales posibilidades sino *a posteriori*, pues conocerlas significa manejarlas y, por consiguiente, actualizarlas; pero demostrar *a posteriori* que de las leyes de una estructura dada se puede sacar legítimamente tal o cual consecuencia, por más que aquélla haya quedado reconstruida con tal fin sobre el plano de la reflexión, en el que la traspondrá la abstracción reflectora, es asimismo demostrar que las posibilidades abiertas por la estructura de partida estaban determinadas. Mas incluso aunque estuviera determinado de antemano el hincapié hecho sobre la posibilidad particular del caso, ello no significa que se la hubiera podido conocer antes de estar realizada: significa —cosa que es ya algo— que cabe reconstruir retroactivamente tal predeterminación; lo cual basta para que hablemos de ella como de una posibilidad predeterminada, por más que de entre dos posibles haya sido ese el que se haya convertido en real.

En conjunto, buscar el origen genético de los entes lógico-matemáticos en las coordinaciones generales de la acción no

significa, pues, que éstas contengan de antemano aquéllos, sino que las construcciones que se derivan de ellas merced al juego de las abstracciones reflectoras son al mismo tiempo nuevas y no arbitrarias, ya que están incluidas en un marco predeterminado de posibilidades. En cuanto a la manera de definir tal marco, cabe hacerlo de dos modos, que, indudablemente, se resumen en uno solo: uno de ellos se apoyaría, para superar la estructura de partida, en la necesidad de integrarla en otra más amplia a partir de la cual quepa deducir aquélla, y la otra se reduciría, sin más, a la necesidad de no contradicción; pero, como no se puede demostrar la no contradicción de un sistema por medio de instrumentos tomados de él mismo o de otros más débiles, esto equivale, una vez más, a la necesidad de construir sistemas cada vez más fuertes, reduciéndose así a la primera condición. Ahora bien, según hemos visto (en el capítulo 10, § 54), esta obligación formal de trascender constantemente los sistemas ya construidos para garantizar su no contradicción converge con la tendencia genética a superar incesantemente las construcciones ya terminadas colmando sus lagunas, lo cual se expresa psicológicamente por la tendencia al equilibramiento. Si ello es así, el constructivismo parece estar justificado desde el doble punto de vista formal y genético, y, en realidad, en lo único en que se diferencia del platonismo es en que se niega a hablar del universo de los posibles como si fuese algo ya acabado o «existente», pero conserva de él la convicción de que tal universo es accesible, y precisamente por el procedimiento común a todas las escuelas, que es el de la construcción efectiva (en el sentido más amplio, incluida la reconstrucción axiomática).

CONCLUSIONES GENERALES

Por E. W. Beth y J. Piaget

Los análisis que hemos llevado a cabo en las dos partes de esta obra confirman ante todo, según nos parece, la concepción de la entera autonomía de la lógica, en cuanto teoría del razonamiento demostrativo, con respecto a la psicología, y recíprocamente. Esta independencia mutua de las dos disciplinas, a la que, por lo demás, casi todo el mundo se adhiere actualmente, implica la necesidad de renunciar a todo «psicologismo» en lógica y en matemáticas y a todo «logicismo» en psicología; lo cual equivale a garantizar la autonomía de las investigaciones respectivas en los dos campos así considerados.

Pero la situación es muy distinta cuando nos colocamos en el punto de vista de la epistemología, en la medida en que esta disciplina se propone interpretar la ciencia en calidad de resultado de la actividad mental del hombre o —cosa que viene a ser lo mismo— explicar cómo puede el pensamiento real del hombre producir la ciencia como sistema coherente de conocimientos objetivos.

En efecto, es evidente que todo intento de elaborar una epistemología científica, y no especulativa, exige que se establezca cierta coordinación entre la lógica y la psicología; y la razón es que el análisis epistemológico ha de hacer que intervenga, por una parte, la psicología, ya que tal análisis versa sobre ciertas formas del pensar real, y, por la otra, la lógica, dado que a la vez se trata de la ciencia en cuanto sistema coherente. En una palabra, si no solamente se mira la ciencia *in abstracto*, sino asimismo *in concreto*, como producto del pensamiento real del hombre, es imprescindible explicar el nota-

ble hecho de que en sus pasos deductivos, que no solamente intervienen en las ciencias puramente deductivas, sino igualmente en las experimentales y las normativas, el despliegue del mecanismo del pensamiento esté conforme con las leyes de la lógica. Esta conformidad tiene una importancia particular en el caso de la matemática «abstracta», caso en que es muy sorprendente porque los sistemas deductivos se ocupan entonces de estructuras que no corresponden a nada en el pensamiento consciente del sujeto.

Dicho con mayor exactitud, nos encontramos ante dos hechos igualmente notables, que el epistemólogo ha de explicar: en primer lugar, tenemos el hecho de que el despliegue del pensamiento real concuerde con los principios de la lógica (si las circunstancias son favorables); y en segundo, el de que, en sus reflexiones posteriores, la inteligencia se muestre capaz de percatarse de tal conformidad e incluso, en cierta medida, de justificar la aceptación de los preceptos de la lógica en cuanto «leyes del pensamiento» (naturalmente, en el sentido de leyes normativas).

Cuando se decide uno a empezar por el estudio del desarrollo, el hecho más sorprendente, sin duda alguna, es que el pensamiento lógico propiamente dicho y, en especial, la toma de conciencia de sus leyes no aparezcan sino a un nivel relativamente elevado de la evolución mental. Observación que basta por sí sola para mostrar el interés del método de explicación genético y causal; pues una explicación que no se refiera más que a estructuras estáticas, supuestas permanentes, y que, por ejemplo, invoque la «naturaleza racional» del hombre, la «intuición» o la «evidencia» es incapaz de satisfacernos, ya que semejante tipo de explicaciones equivale a considerar como datos primeros unas realidades que no son sino resultantes, y no tiene posibilidad de informarnos acerca de eventuales niveles previos cuyo conocimientos sea, precisamente, indispensable para comprender cómo se forman las estructuras que han de explicarse.

Por otra parte, el requisito de la explicación genética elimina el empleo —al menos de un modo exclusivo— del método introspectivo, aunque no sea por otra razón que la de que se-

mejante método no puede aplicarse más que a sujetos que hayan alcanzado ya un nivel mental sumamente elevado. Por ello, la aplicación exclusiva de la introspección lleva forzosamente a tentativas de explicación que recurren al estructuralismo estático o sin génesis a que acabamos de aludir; aunque, si bien es un método incompleto y en ciertos aspectos engañoso cuando se lo emplea con exclusividad, no deja de tener su valor cuando se lo combina con el método genético y, en particular, con la prolongación natural de éste que es el histórico-crítico.

Acaso sea útil insistir en estos dos puntos (papel del método histórico y significación de la introspección unida a la historia y a los mismos datos genéticos) para señalar mejor la unidad de las dos partes de la presente obra, cuyos autores, que han partido de puntos de vista muy distintos, según muestran sus trabajos anteriores, se han visto llevados a un acuerdo en lo que concierne a estas conclusiones comunes.

Ante todo, es evidente que el método genético encuentra a la vez su complemento y su instancia fiscalizadora (fiscalización que puede tanto acabar en una corrección como en una verificación) en el histórico-crítico.

Ambos se completan por dos razones. La primera es que la génesis no se termina nunca, sino que se prolonga durante toda la historia, razón por la cual los datos históricos sobre las etapas de formación de las matemáticas y los genéticos sobre las formas elementales de esta depuración se iluminan mutuamente. Y la segunda reside en que los datos genéticos pueden colmar en parte las lagunas históricas acerca de los períodos más antiguos: por ejemplo, en Aristóteles la teoría del movimiento de los proyectiles descansa sobre el concepto de ἀντιπερίστασις que acaso parezca haberse inventado *ad hoc*; pero el hecho de que en el niño moderno de ocho a diez años encontremos de nuevo constantemente tal esquema de una «reacción ambiente» (pese a las nociones inerciales que el maquinismo moderno ha hecho corrientes) hace ver que semejante esquema debía de formar parte del sentido común de los griegos, y que, en este punto lo mismo que en tantos otros, la física peripatética marca un retroceso al pensamiento común más que una prolongación de las esperanzas de la matematización platónica.

Por otra parte, en cambio, el método histórico crítico permite fiscalizar eficazmente las hipótesis genéticas. Por ejemplo, el hecho de que el concepto de grupo de transformaciones pueda desempeñar un papel fundamental en la lógica inconsciente de la coordinación de las acciones y las operaciones, sin que por ello dé lugar a una introspección adecuada, parece confirmado a la vez por lo total que ha sido el éxito final de los descubrimientos de Galois y por la sorprendente incomprensión inicial con que chocaron en un principio sus ideas (muy en especial por parte de sus examinadores universitarios). Recíprocamente, varias hipótesis genéticas (a decir verdad, más especulativas que experimentales), como, por ejemplo, la del papel de la sensación en la formación de los conceptos matemáticos (cf. D'Alembert, etc.), no resisten al análisis histórico de los procesos de invención.

Esto nos lleva de nuevo al problema de la introspección, pues una de las fuentes de importancia de la reconstitución histórica está constituida por el testimonio de los grandes autores responsables de descubrimientos cruciales, y tales testimonios llevan consigo una parte no desdeñable de datos introspectivos. Ahora bien, aunque los métodos genéticos han inspirado cierta desconfianza en el empleo exclusivo de los procedimientos de introspección, no puede concluirse de ahí que carezcan de todo valor: el objeto de la psicología no es el comportamiento puro, haciendo abstracción de toda conciencia (según querrían convencernos ciertas escuelas extremosas), sino la «conducta», comprendida la conciencia, que está suscitada por el juego de vinculaciones que determinan las condiciones de la «toma de conciencia»; ahora bien, en la medida en que, como ha mostrado Claparède, ésta surge con ocasión de las inadaptaciones y contribuye a las readaptaciones, existe una introspección válida junto a las introspecciones tendenciosas. De donde se sigue que la introspección de los mejores inventores, una vez disociadas las partes respectivas de la interpretación filosófica involuntaria y de las tomas de conciencia propiamente funcionales, es de índole tal que puede someter a comprobación (y, en gran cantidad de puntos, completar muy

útilmente) los datos obtenidos al aplicar los métodos «objetivos».

Una vez dicho esto, adviértase que hay algo que posee un interés decisivo para la epistemología: el que los resultados de las investigaciones genéticas llevadas a cabo con métodos «objetivos» sobre sujetos de variados niveles (a partir de los cuatro a cinco años, aproximadamente) parezcan indicar que el pensamiento lógico, la comprensión de sus leyes lógicas e incluso la formalización del razonamiento constituyen el punto de llegada natural de un desarrollo mental, algunas de cuyas fases intermedias pueden extraerse y describirse con una exactitud a menudo sorprendente.

Si estas conclusiones se verificasen ulteriormente, la consecuencia mínima que podría sacarse de ello es que las estructuras lógico-matemáticas no son radicalmente extrañas o exteriores a las actividades del sujeto. Mas como, por otra parte, el sujeto enzarzado con estas estructuras se siente constantemente obligado por su «objetividad intrínseca», y experimenta casi siempre la impresión de descubrirlas más que de inventarlas de punta a cabo, tanto los datos genéticos como la conciencia del matemático creador conducen a percatarse de que es preciso introducir una fundamental distinción epistemológica entre dos tipos de sujetos, o entre dos niveles de profundidad dentro de cualesquiera sujetos: existe el «sujeto psicológico», centrado sobre el yo consciente y cuyo papel funcional es incuestionable, pero que no es fuente de ninguna estructura general de conocimientos; pero también existe el «sujeto epistémico» o parte común a todos los sujetos del mismo nivel de desarrollo, cuyas estructuras cognoscitivas se derivan de los mecanismos más generales de la coordinación de las acciones. Y en el grado en que los hechos nos autoricen a buscar una vinculación entre las estructuras lógico-matemáticas y las actividades del sujeto, las indagaciones habrán de encaminarse, naturalmente, en la dirección de este último sujeto.

Nos gustaría acabar la presente obra con esta perspectiva de las investigaciones que habría que continuar y profundizar. A nuestro juicio, el que un lógico y un psicólogo hayan podido colaborar en el debate de los problemas referentes a los fun-

damentos de la matemática, tan delicados y complejos, y que en el Centro Internacional de Epistemología Genética sea ya la regla, tras cinco años de continua actividad, la colaboración de lógicos, de matemáticos y de psicólogos, constituyen signos de los tiempos. Una epistemología que quiera ser científica, es decir, comunicable independientemente de las tradiciones de las diversas escuelas, no puede ser otra cosa que fruto de una colaboración interdisciplinar; pues ni los lógicos ni los psicólogos disponen, por sí solos, de los instrumentos suficientes para desenmarañar las enredadas relaciones que existen entre el sujeto y el objeto del conocimiento, y no se harán adelantar las soluciones por yuxtaposición de puntos de vista incoordinables; por el contrario, si en una serie de cuestiones especiales y bien delimitadas se consiguen conciliar las exigencias del análisis genético con las de las formalización, las líneas generales de los problemas habrán de mostrársenos con mayor claridad.

Ahora bien, en este punto, la hipótesis de un sujeto epistémico, caracterizado por una lógica de la coordinación general de las acciones, constituye un marco suficientemente amplio, en el que podrían formularse una serie de cuestiones precisas que diesen ocasión a una sucesión indefinida de colaboraciones fecundas. Es evidente, en efecto, que si se quiere extraer con alguna exactitud esa lógica de la coordinación de las acciones, el análisis genético confluirá cada vez más con los problemas de la estructura de las coordinaciones nerviosas; y el sugestivo ensayo de McCulloch y Pitts sobre el isomorfismo de las conexiones neuronales y de las estructuras lógicas no constituye al respecto sino un pequeño comienzo, capaz de desarrollarse ampliamente[1]. Por otra parte, toda matematización de las estructuras neurológicas, ya se trate de extraer la lógica correspondiente o de aplicarles una cuantificación probabilística, recurre a los modelos constituidos por las máquinas computadoras, punto en que también se presentan prometedoras las investigaciones, en especial debido a las analogías con la interpretación del desarrollo de las estructuras a modo de un

[1] Desarrollo en el que, por lo demás, el mismo McCulloch y su equipo trabajan activamente.

proceso de equilibramiento por escalones sucesivos[2]; ahora bien, el análisis de los mecanismos propios de semejantes máquinas corresponde a la lógica y al álgebra general, por lo que no es temerario pensar que el porvenir de tales investigaciones, en todos sus múltiples aspectos, habrá de conducir a una colaboración más estrecha de la que hasta ahora ha habido entre los trabajos genéticos, que tienen como mira la filiación de las estructuras reales, y los análisis formales, que, por su parte, apuntan a una filiación abstracta de estructuras, animados de un espíritu análogo al de los Bourbaki, pero remontándose a las estructuras más elementales posible en el terreno de la lógica misma.

Pero si podemos prever para el porvenir una colaboración de este tipo, es porque ya ahora comenzamos a discernir las razones por las que las respectivas actividades del lógico y del psicólogo, por autónomas que sean, tienden no a hacer cada una de ellas que la otra intervenga en una esfera que le ha de ser ajena, sino a que se la tenga en cuenta como referencia necesaria.

Sin duda alguna, toda tentativa del lógico por llegar a unos fundamentos que no subordinen la lógica ni a convenciones arbitrarias ni a hechos contingentes tiene necesariamente que partir de la lógica misma. Pero entonces no basta el recurso a la sintaxis: la obligación de atribuir un contenido preciso a conceptos tales como los de «verdad», «cumplimiento», «designación», etc., remite al nivel semántico. Sólo que, si nos atenemos a la lógica ya constituida, surgen entonces dos clases de dificultades, paradójicamente opuestas: por una parte, el instrumento de que dispone el lógico parece poseer una riqueza de posibilidades excesiva para fundamentarse unívocamente, ya que tal instrumento hace intervenir una multiplicidad de sistemas lógicos; y, por otra, cada uno de ellos, tomado por separado, parece demasiado pobre para fundamentarse del todo (como muestra, por ejemplo, el teorema de Tarski sobre la verdad). De lo cual se sigue que, de este lado de la lógica ya

2 Véanse las comunicaciones de S. Papert al Centro de epistemología genética sobre los posibles perfeccionamientos del modelo del *perceptrón.*

constituida, el lógico habrá de examinar, tarde o temprano, la manera misma en que se construye esta disciplina (o, dicho con mayor precisión, en que *él* la construye). Esto significa, pues, que el concepto de actividad lógica del lógico va a desempeñar cierto papel en el análisis de los fundamentos: los cuadros semánticos, por ejemplo, pueden también servir de cuadros heurísticos, y desde este punto de vista resultan ser heurísticos *para* un sujeto; y al percatarse de esta posibilidad, el lógico apela a cierta psicología —aun cuando no pronuncie este nombre—, que es la del sujeto lógico.

Entonces puede ofrecer interés para él recoger informaciones acerca de esta construcción lógica (por más que, naturalmente, siga siendo único juez en cuanto a la utilización que haga de ellas). Esto es lo que hace al recurrir al método histórico-crítico, el cual, por su parte, le conducirá antes o después a interesarse no ya sólo por los sujetos-lógicos profesionales, sino por los sujetos lógicos en general; y acaso al ocuparse de estos últimos se sienta inclinado a examinar lo que digan los psicólogos acerca de ellos. Pero esta información no puede ser cualquiera, indiscriminadamente, pues en este caso resurgiría el peligro del psicologismo: entre otras cosas, le será imposible valerse de conceptos y resultados psicológicos provinentes de experimentos u observaciones efectuados con vistas al estudio de problemas distintos que, precisamente, el de la construcción de las estructuras lógicas, conceptos y resultados que correría el riesgo de interpretar o demasiado estrictamente (limitando así involuntariamente su alcance) o demasiado ampliamente, atribuyéndoles algo que no tengan [3].

Finalmente, es palmario que el estudio psicológico del pensamiento adulto no puede bastar para sus necesidades, ya que, por minucioso que queramos suponer este análisis, lo más que permitirá decir será que el sujeto procede de tal o cual manera; ahora bien, no cabe que la norma dependa de los hechos,

---

[3] Como ejemplo de esta última tendencia pensamos especialmente en lo que S. Bachelard cree poder concluir a partir del análisis de la memoria; lo cual sucede precisamente en una obra por lo demás muy notable (*La conscience de rationalité,* París, P. U. F.), en la que en diversos pasajes se manifiesta una desconfianza sistemática con respecto al psicologismo.

salvo que proyecte en ellos la estructura de una lógica establecida de antemano.

En resumen: si el lógico quiere saber cómo se construyen las estructuras lógicas, sólo le puede ser útil una psicología que responda a estas dos condiciones: a) versar sobre esa construcción, precisamente, y b) ser genética. Unicamente a este precio se podrá superar la simple descripción de la actividad cognoscitiva del sujeto individual y llegar a la constitución de un inventario de los instrumentos de conocimiento del sujeto epistémico.

Recíprocamente, el psicólogo no puede evitar el recurso a la lógica y al ideal de formalización que ésta conlleva: no simplemente porque se trate de un lenguaje cómodo y preciso o de una incitación a imaginar experimentos, sino porque el pensamiento del lógico constituye la forma más elaborada del pensamiento del hombre, y es imposible dar cuenta psicológicamente del conocimiento humano sin integrar en él la actividad del lógico en cuanto tal.

En efecto, a la psicología no puede bastarle la descripción de cómo aparecen, de hecho, ciertas leyes lógicas: queda además por interpretar la necesidad que les acompaña una vez asentadas. Ahora bien, si se remitiese sin más este problema a los lógicos profesionales se vendría a decir que una ley es necesaria por ser lógica, cosa que no es decir nada: la única manera de proceder consiste en mostrar que esta o aquella ley particular corresponde a una estructura de conjunto, cuya compleción y cierre explicarán la necesidad de sus elementos como algo subordinado a la totalidad. Ahora bien, esas estructuras son precisamente lo que el lógico trata de «fundamentar»; mas el psicólogo no las toma simplemente prestadas de él, como conceptos prefabricados por éste y que, por su parte, se empeñase más o menos artificialmente en encontrar en el pensamiento natural: para el psicólogo, la estructura es, ante todo y esencialmente, el producto final de cierta evolución estructurante, y el estudio de ésta le garantiza que capta así debidamente las *leyes* generales del conocimiento real (de su funcionamiento y de sus construcciones); de este modo, el análisis de la estructura *en cuanto tal* da cuenta de sus rasgos

de generalidad y de necesidad interna, que el pensamiento natural lleva ya en sí implícitamente.

En conjunto, cada una de estas dos actividades, la del lógico y la del psicólogo, remite a la otra: no porque sean interdependientes, sino porque, siendo ambas enteramente autónomas, se complementan. Así, pues, estas autonomía y completariedad reunidas son lo que no sólo hace posible, sino necesario, la búsqueda de una síntesis epistemológica.

BIBLIOGRAFIA

ABELE, J., y MALVAUX, P., *Vitesse et Univers relativiste,* París, Sedes.

BERGSON, H., *Essai sur les données inmédiates de la conscience,* París, 1889 [vers. cast. «Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia», en *Obras escogidas,* Madrid, Aguilar, 1963].

BERKELEY, G., *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge,* 1710 [vers. cast. en *Teoría de la visión y Tratado sobre el conocimiento humano,* Buenos Aires, Espasa Calpe («Historia y filosofía de la ciencia»), 1948].

BERNAYS, P., «Quelques points de vue concernant la problème de l'évidence», *Synthèse,* 7 (1949).

— «Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit», en *Études de philosophie en hommage à Ferdinand Gonseth,* Neuchâtel, 1950.

— «Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung», *Revue internationale de philosophie,* 8 (1954).

— *Axiomatic Set Theory* («Studies in Logic»), Amsterdam, 1959.

BETH, E. W., «Decision Problems of Logic and Mathematics», en *Philosophie,* XIII, «Actualités Scientifiques et industrielles», 1105, París, 1950.

— *Les fondements logiques des mathématiques,* segunda edición, París y Lovaina, 1955.

— *L'existence en mathématiques,* París y Lovaina, 1956.

— «Ueber Lockes «Allgemeines Dreieck», *Kant-Studien,* 48 (1956-57).

— «Le savoir déductif dans la pensée cartésienne», en *Descartes* («Cahiers de Royaumont», Philosophie núm. II), París, 1957.

— *La crise de la raison et la logique,* París y Lovaina, 1957.

— «Cogito ergo sum». Raisonnement ou intuition?», *Dialectica,* 12 (1958).

— «On Machines Which Prove Theorems», *Simon Stevin,* 32 (1958).

— *The Foundations of Mathematics* («Studies in Logic»), Amsterdam, 1959.

BOURBAKI, N., *Éléments de mathématiques,* «Actualités scient. et industr.», París, de 1938 en adelante.

BOURBAKI, N., «L'architecture des mathématiques» [vers. cast.: «La arquitectura de las matemáticas»], en LE LIONNAIS, 1948.

BROUWER, L. E. J., *Over de grondslagen der wiskunde*, Amsterdam y Leipzig, 1907.

— «Mathematik, Wissenschaft und Sprache», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 36 (1924).

BRUNSCHVICG, L., *Les étapes de la philosophie mathématique*, París, 1912 [vers. cast.: *Las etapas de la filosofía matemática*, Buenos Aires, Lautaro, 1945].

CANTOR, G., «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre», *Mathematische Annalen*, 46 (1895) y 49 (1897).

COUTURAT, L., *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, París, 1903 [reimpr., Olms, Hildesheim, 1966].

— *Les principes des mathématiques*, París, 1905.

CURRY, H. B., *A Theory of Formal Deductibility, reimpr.*, Notre Dame de Indiana, 1957.

D'ARCY-THOMPSON, *On Growth and Form*, Cambridge, 1942.

DENJOY, A., «L'inneité du transfini» [vers. cast.: «La inneidad del transfinito»], en LE LIONNAIS, 1948.

DESCARTES, R., *Oeuvres philosophiques*, edición de L. AIMÉ-MARTIN, París, 1842.

— [*Reglas para la dirección del espíritu*, Madrid, Revista de Occidente, 1935].

— [*Discurso del Método y Meditaciones metafísicas*, Madrid, Jiménez Fraud, s. a.].

ENRIQUES, F., *Les problèmes de la science et de la logique*, trad. de J. DUBOIS, París, 1909 [vers. cast. de la ed. orig.: *Problemas de la lógica*, Buenos Aires, Espasa Calpe («Historia y filosofía de la ciencia»), 1947].

— *Les concepts fondamentaux de la science*, trad. de ROUGIER, París, 1914.

FARBER, M., *The Foundation of Phenomenology*, Cambridge de Massachussets, 1943.

FEHR, H., *Enquète de l'«Enseignement Mathématique» sur la méthode de travail des mathématiciens*, en colaboración con T. FLOURNOY y E. CLAPARÈDE, París y Ginebra, 1908.

FITCH, F. B., «Symbolic Logic - Algebra of Ideas», *Yale Alumni Magazine*, 19 (1956).

FRAZER, J. G., *The Golden Bough* [vers. cast. de la ed. abreviada (1922): *La rama dorada*, segunda ed., México, F. C. E., 1951].

FREGE, G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884.

FREUDENTHAL, H., «Zur Geschichte der vollständigen Induktion», *Archives d'Histoire des Sciences*, núm. 22 (1953).

— «Le développement de la notion d'espace depuis Kant», *Sciencies*, 1 (1958).

GENTZEN, G., «Untersuchungen über das logische Schliessen», *Mathematische Zeitschrift*, 39 (1934), págs. 176-210 y 405-431.

GENTZEN, G., (trad. francesa): *Recherches sur la déduction logique*, trad. y comentarios de R. FEYS y J. LADRIÈRE, París, P. U .F., 1955.

GEORGE, F. H., «Meaning and Behaviour», *Synthèse*, 11 (1959).

GOBLOT, E., *Traité de Logique*, París, 1918.

— *Le système des sciences*, París, 1922.

GÖDEL, K., «Ueber formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I», *Monatschrift für Math. und Phys.*, 38 (1931), págs. 173-198.

— «Russell's Mathematical Logic», en SCHILPP, 1934.

GONSETH, F., *Les mathématiques et la réalité*, París, 1932.

GRÉCO, P., «Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant», en *Problèmes de la construction du nombre* («Ét. d'Épist. génét.», volúmen XI), París, P. U. F., 1960.

— «Quantité et quotité, nouvelles recherches sur la correspondence terme à terme et sur la conservation des ensembles», en *Structures numériques élémentaires* («Ét. d'Épist. génét.», vol. XIII), París, P. U. F., 1961.

— «Le progrès des inférences fondées sur l'itération numérique chez l'enfant et l'adolescent», en *Les inférences arithmétiques élémentaires* (que aparecerá en los «Ét. d'Épist. génét.»).

GRÉCO, P., y PIAGET, J., *Apprentissage et connaissance* («Ét. d'Épist. génét.», vol. VII), París, P. U. F., 1959.

GRIZE, J. B., «Portée et limites de la formalisation», *Studia Philosophica*, XVIII (Basilea, 1958), págs. 103-13.

— «Du groupement au nombre: essai de formalisation», en *Problèmes de la construction du nombre* («É. d'Épist. génét.», vol. XI), París, P. U. F., 1960.

— «Remarques sur la limitation des formalismes», trabajo que aparecerá en los «Et. d'Epist. génet.».

GROOT, J. DE, *Tijd onder mathematisch aspect*, Amsterdam, 1952.

GRÜNBAUM, A., «Whitehead's Method of Extensive Abstraction», *British Journal of the Philosophy of Science*, 4 (1953).

HADAMARD, J., *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton de N. J., 1945 [vers. cast.: *Psicología de la invención en el campo matemático*, Buenos Aires, Espasa Calpe «Historia y filosofía de la ciencia»), 1947].

HEATH, T. L., *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897 y 1912.

HELMHOLZ, H. VON, «Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet», en *Wissenschaftliche Abhandlungen von H. von Helmholz*, tomo tercero, Leipzig, 1895, págs. 356-91, y en

— *Schriften zur Erkenntnistheorie*, edición y coment. de P. HERTZ y M. SCHLICK, Berlín, 1923.

HERMANN, I., «Wie die Evidenz wissenschaftlicher Thesen entsteht», *Imago*, 9 (1923).

— *Psychoanalyse und Logik*, Leipzig, Viena y Zürich.

HERMANN, I., «Denkpsychologische Betrachtungen im Gebiete der mathematischen Mengenlehre», *Schweizer Zeitschrift für Psychologie,* 8 (1949).

HERMITE, C., citado *apud* LALLEMAND, 1934.

HEYMANS, G., *Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens,* cuarta ed., Leipzig, 1923.

HEYTING, A., *Les fondements des mathématiques - Intuitionisme - Théorie de la démonstration,* París, 1955.

HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie,* sexta ed., Leipzig y Berlín, 1923 [vers. cast. de la séptima ed. alemana: *Fundamentos de la Geometría,* Madrid, C. S. I. C. («Colección de textos clásicos»), 1953].

— «Die Grundlagen der Mathematik», *Abhandlungen des mathematischen Seminars Hamburg,* 6 (1928 [vers. cast.: «Los fundamentos de la Matemática», Apéndice IX de los *Fundamentos de la Geometría* acabados de citar]).

— «La connaissance de la nature et la logique», *L'enseignement mathématique,* 30 (1931).

HILBERT, D., y BERNAYS, P., *Grundlagen der Mathematik* (2 tomos), Berlín, 1934 y 1939.

HUME, D., *A Treatise of Human Nature,* 1739-40 [vers. cast.: *Tratado de la naturaleza humana. Ensayo para introducir el método del razonamiento experimental en los asuntos morales* (3 tomos), Madrid, Calpe («Colección Universal»), 1923].

HUSSERL, E. G., *Philosophie der Arithmetik,* tomo primero, Halle de Saale, 1891.

— «Bericht über deutsche Schriften zur Logik i. d. Jahren, 1895-1898», *Archiv für systematische Philosophie,* 9 (1903) y 10 (1904).

— *Logische Untersuchungen,* segundo tomo, primera parte, segunda edición, Halle de Saale, 1913 [vers. cast. de la obra entera: *Investigaciones lógicas* (4 tomos), Madrid, Revista de Occidente, 1929; reimpr. en formato de bolsillo, *id.,* 1968].

— (trad. francesa): *Recherches logiques,* tomo segundo, primera parte (invest. I y II), trad. de Hubert ELIE, París, P. U. F., 1961.

ILLEMAN, W., *Husserls vor-phänomenologische Philosophie,* Leipzig, 1932.

INHELDER, B., y PIAGET, J., *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, essai sur la construction des structures opératoires formelles,* París, P. U. F., 1955.

— *La Genèse des structures logiques élementaires: classifications et sériations,* Neuchâtel y París, Delachaux et Niestlé, 1959.

JAENSCH, E. R., y ALTHOFF, F., *Mathematisches Denken und Seelenform,* Leipzig, 1939.

JEVONS, W. Stanley, *Pure Logic and Other Minor Works,* Londres, 1890.

KALMAR, L., «On Unsolvable Mathematical Problems» *Proceedings of the Xth International Congress of Philosophy,* Amsterdam, 1949.

KANT, I., *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral,* 1764.

— *Kritik der reinen Vernunft,* primera ed., 1781 («A»), y segunda edición, 1787 («B») [vers. cast.: *Crítica de la razón pura* (2 to-

mos), Madrid, Victoriano Suárez, 1928 (incompleta), e *Id.* (2 tomos), cuarta ed., Buenos Aires, Losada, 1961].

KANTOR, J. R., *Psychology and Logic*, Nueva York, 1950.

KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam y Groningen, 1952 [cuarta reimpr., 1964].

KLEIN, F., «On the mathematical character of space-intuition», en *Gesammelte Abhandlungen*, tomo II.

LALLEMAND, M., *Le transfini*, París, 1934.

LANGE, F. A., *Logische Studien*, Iserlohm, 1877.

LEIBNIZ, G. W., *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, 1715 [versión castellana: *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano*, Madrid, Aguilar, s. a.].

— *Opuscules*, cf. COUTURAT, 1903.

LE LIONNAIS, F., *Les grands courants de la pensée mathématique*, París, 1948 [vers. cast.: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires, Eudeba, 1948].

LOCKE, J., *An Essay Concerning Human Understanding*, 1690 [vers. cast.: *Ensayo sobre el entendimiento humano*, México, F. C. E., 1956].

LORENZEN, P., *Formale Logik*, Berlín, De Gruyter («Sammlung Göschen»), 1962.

MCCULLOCH, W. S., *et al.*, diversos artículos publicados en el *Bulletin of Mathematical Biophysics*, especialmente en los núms. 5 (páginas 115 y 135) y 7 (pág. 89).

— *The brain as a computing machine*, Nueva York, 1949 (opúsculo).

MACH, E., «Ueber dar Prinzip der Vergleichung in der Physik», en *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen*, segunda ed., Leipzig, 1897.

— *Erkenntnis und Iritum*, segunda ed., Leipzig, 1906 [vers. cast.: *Conocimiento y error*, Buenos Aires, Espasa Calpe («Historia y filosofía de la ciencia»), 1948].

MANNOURY, G., *Les fondements psycholinguistiques des mathématiques*, Bussum y Neuchâtel, 1947.

MARBE, K., *Experimentell-psychologische Untersuchungen über das Urteil*, Leipzig, 1901.

MEYERSON, E., *Du cheminement de la pensée* (3 tomos), París, 1931.

MILL, J. Stuart, *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, Londres, 1843 [vers. cast.: *Sistema de lógica demostrativa e inductiva, o sea, exposición comparada de los principios de evidencia y los métodos de investigación científica* (2 tomos), Madrid, Rivadeneyra, 1853], trad. francesa de PEISSE, París, 1880.

MORF, A., SMEDSLUND, J., VINH-BANG y WOHLWILL, J. F., *L'apprentissage des structures logiques* («Ét. d'Épist. génét.», vol. IX), París, P. U. F., 1959.

MOSTOWSKI, A., «Sur l'interprétation géométrique et topologique des notions logiques», *Proceedings of the Xth International Congress of Philosophy*, Amsterdam, 1949.

NICOD, J., *La géometrie dans le monde sensible*, París, 1924.

PAPERT, S., «Sur le réductionnisme logique», en *Problèmes de la construction du nombre* («Ét. d'Épist. génét.», vol. XI), París, P. U. F., 1960.

PASCAL, B., *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, 1658.

PASCH, M., *Mathematik und Logik*, Leipzig, 1926.

PIAGET, J., *Le construction du réel chez l'enfant*, Neuchâtel y París, Delachaux et Niestlé, 1937 [vers. cast. de la tercera ed. francesa (1963): *La construcción de lo real en el niño*, Buenos Aires, Proteo («Persona y Sociedad»), 1965].

— *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, París, P. U. F., 1946.

— *Le développment de la notion de temps chez l'enfant*, París, P. U. F., 1946.

— *Introduction à l'épistémologie génétique, t. I: La pensée mathématique*, París, P. U. F., 1949.

— *Traité de logique. Essai de logistique opératoire*, París, Colin, 1950.

— *Essai sur les transformations des opérations logiques. Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions*, París, P. U. F., 1952.

— [«Programme et méthode de l'épistémologie génétique», en *Epistémologie génétique et recherche psychologique* («Ét. d'Épist. génet.», vol. I), París, P. U. F., 1957; vers. cast.: *Psicología, lógica y comunicación. Epistemología genética e investigación psicológica*, Buenos Aires, Nueva Visión, 1959.]

— «Logique et équilibre dans les comportements du sujet», en *Logique et équilibre* («Ét. d'Épist. génét.», vol. II), París, P. U. F., 1957, páginas 27-117.

— *Les mécanismes perceptifs. Modèles probabilistes, évolution génétique, relations avec l'intelligence*, París, P. U. F., 1961.

PIAGET, J. e INHELDER, B., *La représentation de l'espace chez l'enfant*, París, P. U. F., 1947.

PIAGET, J., INHELDER, B., y SZEMINSKA, A., *La géométrie spontanée de l'enfant*, París, P. U. F., 1948.

PIAGET, J., y SZEMINSKA, A., *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel y París, Delachaux et Niestlé, 1941.

[PIAGET, J., *et al.*, *L'enseignement des mathématiques*, Neuchâtel y París, Delachaux et Niestlé; vers. cast.: *La enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Aguilar, 1963].

PIERI, M., «La geometría elementare istituita sulle nozione di "punto" e "sfera"», *Memorie di Mat. e di Fisica della Soc. delle Sc.* (3), 15 (1908).

POINCARÉ, H., *La valeur de la science*, París, 1905 [vers. cast.: *El valor de la ciencia*, segunda ed., Buenos Aires, Espasa Calpe («Colección Austral»), 1946].

— *Science et méthode*, París, 1909 [vers. cast.: *Ciencia y método*, Buenos Aires, Espasa Calpe («Colección Austral»), 1946].

— *Dernières pensées*, París, 1913.

POLYA, G., *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 tomos), Princeton de N. J., 1954 [vers. cast.: *Matemáticas y razonamiento plausible,* Madrid, Tecnos, 1966].

— *How to Solve It,* segunda ed., Nueva York, 1957.

POPPER, K. R., *The Open Society and Its Ennemies* (2 tomos), Londres, 1945, cuarta ed. rev., Princeton de N. J., y Nueva York y Evanston, 1963; vers. cast.: *La sociedad abierta y sus enemigos,* Buenos Aires, Paidós, 1957.

PRADINES, M., *Traité de psychologie générale,* tercera ed. (3 tomos), París, 1948.

QUINE, W. V. O., *Mathematical Logic,* ed. rev., Cambridge de Mass., 1951.

— [*From a Logical Point of View,* Cambridge de Mass., 1953; versión castellana: *Desde un punto de vista lógico,* Barcelona Ariel, 1962.]

ROUGIER, L., *Traité de la connaissance,* París, 1955.

ROSSER, J. Barkley, *Logic for Mathematicians,* Nueva York, 1953.

SCHILPP, P. A., *The Philosophy of Bertrand Russell,* Evanston y Chicago, 1944.

SELZ, O., *Ueber die Gesetze der produktiven und reproduktiven Denkverlaufs* (2 tomos), Stuttgart, 1913, y Bonn, 1922.

— *Die Gesetze der produktiven und reproduktiven Geistestätigkeit,* Bonn, 1924.

STOERRING, G., *Einführung in die Erkenntnistheorie,* Leipzig, 1909.

— *Logik,* Leipzig, 1916.

VARSKI, A., *Logic, Semantics, Metamathematics,* Oxford, 1956.

VOIGT, A. H., «Phänomenologische und atomistische Betrachtungsweise», en *Die Kultur der Gegenwart,* 3. Teil, 3. Abt., 1. Band: *Physik,* Leipzig y Berlín, 1915.

VUILLEMIN, J., *Mathématiques et métaphysique chez Descartes,* París, P. U. F., 1960.

WEBER, W., y WELLSTEIN, J., *Enzyklopädie der elementar-Mathematik,* tomo II, Leipzig, 1915.

WHITEHEAD, AN., *An Enquiry concerning the principles of natural knowledge, Cambridge,* 1919.

— *The Concept of Nature,* Cambridge, 1920.

ZIEHEN, T., *Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage,* Bonn, 1920.

INDICE

Págs.

PRIMERA PARTE, por E. W. Beth.

Introducción 7

1. *El análisis del razonamiento matemático es inaccesible para la silogística tradicional* 11

§ 1. Descartes 11
§ 2. El problema de Locke y Berkeley 13
§ 3. Soluciones de Berkeley, Hume y Kant 13
§ 4. Los juicios analíticos y los sintéticos 19
§ 5. El intuicionismo de Descartes y de Kant 21
§ 6. La geometría no euclidea 24
§ 7. Formas recientes del intuicionismo: F. A. Lange, L. Brunschvicg, E. Goblot, H. Poincaré, L. E. J. Brouwer. 26

2. *La interpretación psicológica del razonamiento matemático* ... 33

§ 8. J. Stuart Mill 33
§ 9. La crítica de W. Stanley Jevons 34
§ 10. E. Mach, Th. Ziehen, G. Störring y G. Heymans 36
§ 11. E. Husserl y su pretendido antipsicologismo 41
§ 12. F. Enriques y G. Mannoury 44

3. *La tradición logicista* 47

§ 13. Opiniones de Aristóteles: su acuerdo con la práctica de las matemáticas griegas 47

Págs.

§ 14. Pascal 50
§ 15. Leibniz: la demostración de los axiomas 50
§ 16. Frege y su influencia sobre Husserl y Heymans 53
§ 17. Russell y la crisis de los fundamentos 55
§ 18. Los conjuntistas: Cantor y Zermelo 57
§ 19. Otras reacciones: el intuicionismo de Brouwer, el psicologismo de Mannoury y de Enriques, y el formalismo radical de Hilbert 59
§ 20. La crisis gödeliana 69
§ 21. La deducción natural: Gentzen, Curry, Lorenzen 77
§ 22. La sintaxis y la semántica 87
§ 23. El método de los cuadros semánticos 91
§ 24. Concepciones algebráicas y topológicas 104

4. *Demostración estricta y métodos heurísticos* 111

§ 25. La tipología de los matemáticos 111
§ 26. Las ideas de Poincaré, de Hadamard y de Polya 113
§ 27. La búsqueda de un método al mismo tiempo heurístico y demostrativo: Descartes y el análisis de la Antigüedad 120
§ 28. Leibniz y el problema de la decisión 122
§ 29. Conservación de los niveles inferiores: el método de Arquímedes 123
§ 30. ¿Qué es el pensamiento original: creación o invención, construcción o descubrimiento? La respuesta del platonismo: Frege, Cantor y Hermite 126

5. *Estructuras intuitivas y matemáticas formalizadas* 129

§ 31. La intuición espacial: Kant, Helmholz, F. Klein, Nicod, Whitehead y Tarski 129
§ 32. La intuición temporal: Kant, Bergson, Brouwer y De Groot 134
§ 33. La intuición finitista según Hilbert y la intuición del infinito 138
§ 34. El platonismo como visión intuitiva real o pretendida y la crítica nominalista 142

6. *Las «máquinas de pensar» y el pensamiento matemático* 145

§ 35. La formalización y la construcción de una «máquina de pensar» 145

Págs.

§ 36. La construcción de una «máquina de pensar» presupone la solución de determinado problema de decisión ... 146
§ 37. Irreductibilidad, según Brouwer, del «salto del fin a los medios» ... 150
§ 38. Las funciones recursivas: problemas irresolubles e irresolubilidad absoluta ... 151
§ 39. Los dos grados de libertad del pensamiento matemático: resolver un problema y plantearlo ... 156
§ 40. La evidencia adquirida según Bernays ... 158

Nota sobre la idea de la «máquina de pensar», por Jean-Blaise Grize ... 162

SEGUNDA PARTE, por Jean Piaget.

Introducción ... 165

(Nota autobiográfica, p. 165, n. 1).

7. *Las lecciones de la historia de las relaciones entre la lógica y la psicología* ... 172

§ 41. Las tres etapas de la historia de las relaciones entre las investigaciones lógicas y las psicológicas ... 172
§ 42. Necesidad de una coordinación ... 180
§ 43. El punto de vista genético y el normativo ... 192

8. *Problemas psicológicos generales del pensamiento lógico-matemático.*—A) El problema de las estructuras ... 203

§ 44. Las «estructuras matrices» de Bourbaki ... 204
§ 45. Las estructuras de clases y de relaciones en las acciones y las operaciones del sujeto. Formalización del «agrupamiento» ... 207
§ 46. Las dos formas de reversibilidad (inversión y reciprocidad) y su combinación final en un grupo de cuatro transformaciones ... 219
§ 47. El primado de la topología en la geometría del niño ... 228
§ 48. Las relaciones entre las tres estructuras elementales y las estructuras matrices de Bourbaki ... 231

Págs.

9. *Problemas psicológicos generales del pensamiento lógico-matemático* (continuación). — B) Evidencia, intuición e invención 237

§ 49. La evidencia, sus variaciones y la necesidad lógica ... 237
§ 50. Invención y descubrimiento 246
§ 51. Las múltiples formas de la «intuición» matemática ... 258

10. *Los problemas psicológicos del pensamiento «puro»* 280

§ 52. Las raíces genéticas de la matemática pura 281
§ 53. El problema psicológico de la matemática pura 299
§ 54. Las razones psicológicas de la formalización 306
§ 55. En qué sentido pueden colaborar los métodos genético y axiomático en una formalización del pensamiento real 316

11. *Algunas convergencias entre los análisis formales y los genéticos* 320

§ 56. La construcción de los números naturales 320
§ 57. El fracaso de la reducción de lo superior a lo inferior. 336
§ 58. Los límites de la formalización 340

12. *Problemas epistemológicos en los que inciden cuestiones lógicas y psicogenéticas* 347

§ 59. Interpretación empirista y apriorismo 347
§ 60. La interpretación nominalista o lingüística de las matemáticas 353
§ 61. La interpretación platonista de las matemáticas 359
§ 62. La interpretación de las matemáticas por las leyes de la coordinación general de las acciones 365

Conclusiones generales, por E. W. Beth y Jean Piaget 375

Bibliografía 385